

一、选择题：本大题共 17 小题。每小题 5 分，共 85 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = (0, 1)$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1, 2\}$
- B. $\{0, 2\}$
- C. $\{0, 1\}$
- D. $\{0, 1, 2\}$

答案: C

2. 函数 $y = 2\sin x \cos x$ 的最小正周期是 ()

- A. $\pi/2$
- B. 4π
- C. 2π
- D. π

答案: D

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_3 = 6$, 则 $a_7 =$ ()

- A. 10
- B. 12
- C. 14
- D. 8

答案: C

4. 若甲: $x > 1$; 乙: $e^x > 1$, 则 ()

- A. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
- B. 甲是乙的充分必要条件
- C. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
- D. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件

答案: D

5. 不等式 $|2x - 3| \leq 1$ 的解集为 ()

- A. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$
- B. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
- C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$
- D. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$

答案: A

6. 下列函数中, 为偶函数的是 ()

- A. $y = \log_2 x$
- B. $y = x^2$
- C. $y = 4/x$
- D. $y = x^2 + x$

答案: B

7. 点 $(2, 4)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点的坐标为 ()

- A. $(4, 2)$
- B. $(-2, -4)$
- C. $(-2, 4)$
- D. $(-4, -2)$

答案: A

8. 将一颗骰子抛掷 1 次, 得到的点数为偶数的概率为 ()

- A. $2/3$
B. $1/6$
C. $1/3$
D. $1/2$

答案: D

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=3$, $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, 则 $BC=$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$
C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案: C

10. 下列函数中, 函数值恒为负值的是 ()

- A. $y=x$
B. $y=-x^2-1$
C. $y=x^3$
D. $y=-x^2+1$

答案: B

11. 过点 $(0, 1)$ 且与直线 $x+y+1=0$ 垂直的直线方程为 ()

- A. $y=x+1$
B. $y=2x+1$
C. $y=x$
D. $y=x-1$

答案: A

12. 设双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线的斜率为 k , 则 $|k| =$ ()

- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{16}{9}$
C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

答案: D

13. $64^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{3}} 81 =$ ()

- A. 8
B. 14
C. 12
D. 10

答案: B

14. 若 $\tan \alpha = 3$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. -2 B. $\frac{1}{2}$
C. 2 D. -4

答案: A

15. 函数 $y = \ln(x-1)^2 + \frac{1}{x-1}$ 的定义域为 ()

- A. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
B. $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$
C. $\{x|-1 < x < 1\}$
D. $\mathbb{R}$

答案: B

16. 某同学每次投篮投中的概率为 $\frac{2}{5}$, 该同学投篮 2 次, 只投中 1 次的概率为

- A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{9}{25}$
C. $\frac{6}{25}$ D. $\frac{3}{5}$

答案: A

17. 曲线 $y=x^3-4x+2$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $x-y-2=0$
B. $x-y=0$
C. $x+y=0$
D. $x+y-2=0$

答案: C

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在题中横线上.

18. 若平面向量 $a=(x, 1)$, $b=(1, -2)$, 且 $a \parallel b$, 则 $x=$ _____.

答案: $-1/2$

19. 若二次函数 $f(x)=ax^2+2x$ 的最小值为 $-1/3$, 则 $a=$ _____.

答案: 3

20. 某次测试中 5 位同学的成绩分别为 79, 81, 85, 75, 80, 则他们成绩的平均数为_____.

答案: 80

21. 函数 $y=2^x-2$ 的图象与坐标轴的交点共有_____个.

答案: 2

三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤.

22. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $BC=3$, $B=60^\circ$. 求 AC 及 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 7.$$

故 $AC = \sqrt{7}$.

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

23. (本小题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_3=6$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 5 项和.

解: (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由已知得

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 10, \\ a_1(q+q^2) = 6. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = -3 \end{cases} \text{ (舍去)}, \begin{cases} a_1 = 8, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\text{(II) } \{a_n\} \text{ 的前 5 项和为 } \frac{8\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2}.$$

24. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = 2x^3 + 3mx^2 - 36x + m$, 且 $f'(-1) = -36$.

(I) 求 m ;

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

解: (I) 由已知得 $f'(x) = 6x^2 + 6mx - 36$,

又由 $f'(-1) = -36$ 得

$$6 - 6m - 36 = -36,$$

故 $m = 1$.

(II) 由 (I) 得, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -3, x_2 = 2$.

当 $x < -3$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $-3 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-3, 2)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$, $(2, +\infty)$.

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 斜率为 1 的直线 l 与 C 相交, 其中一个交点的坐标为 $(2, \sqrt{2})$, 且 C 的右焦点到 l 的距离为 1.

(I) 求 a, b ;

(II) 求 C 的离心率.

解: (I) 由已知, 直线 l 的方程为 $x - y - 2 + \sqrt{2} = 0$.

设 C 的右焦点为 $(c, 0)$, 其中 $c > 0$, 由已知得 $\frac{|c - 2 + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$,

解得 $c = 2 - 2\sqrt{2}$ (舍去), $c = 2$.

所以 $a^2 = b^2 + 4$.

$$\frac{4}{b^2 + 4} + \frac{2}{b^2} = 1,$$

解得 $b = -2$ (舍去), $b = 2$. 所以 $a = 2\sqrt{2}$.

(II) C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.