

一、选择题：本大题共 17 小题，每小题 5 分，共 85 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid 0 < x < 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\emptyset$ B. $\{0\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

答案: C

2. 函数 $y = 2\sin x \cos x$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π
C. 2π D. 4π

答案: B

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_3 = 6$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 14
B. 12
C. 10
D. 8

答案: A

4. 将一颗骰子抛掷 1 次, 则得到的点数为偶数的概率为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

答案: B

5. 不等式 $|2x - 3| \leq 1$ 的解集为 ()

- A. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$
B. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$
D. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$

答案: C

6. 下列函数中, 为偶函数的是 ()

- A. $y = \log_2 x$ B. $y = x^2 + x$
C. $y = \frac{4}{x}$ D. $y = x^2$

答案: D

7. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. 2
B. $1/2$
C. -2
D. -4

答案: C

8. $64^{\frac{2}{3}} + \log_3 81 =$ ()

- A. 8 B. 10
C. 12
D. 14

答案: D

9. 曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x$ 的交点坐标为 ()

- A. (1, 2) B. (-1, 2)
C. (2, 4) D. (1, $-\sqrt{2}$)

答案: A

10. 已知正六棱锥的底面边长为 3，侧棱长为 5，则该六棱锥的体积为 ()

A. $18\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

C. $9\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

答案: A

11. 过点 (0, 1) 且与直线 $x+y+1=0$ 垂直的直线方程为 ()

A. $y=x$

B. $y=2x+1$

C. $y=x+1$

D. $y=x-1$

答案: C

12. 设双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线的斜率为 k , 则 $|k| =$ ()

A. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{16}{9}$

答案: B

13. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AD, D_1D 的中点, 则直线 EF 与 BD_1 所成角的正弦值是 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案: A

14. 若函数 $y = \frac{ax+1}{2x-3}$ 的图像与其反函数的图像重合, 则 $a =$ ()

A. -3

B. 1

C. 2

D. 3

答案: D

15. 已知随机变量 ξ 的数学期望 $E \xi = 23$, 其分布列如下表, 则 ()

ξ	10	20	30	40
P	a	0.2	0.1	b

A. $a=0.4, b=0.3$

B. $a=0.3, b=0.4$

C. $a=0.2, b=0.5$

D. $a=0.5, b=0.2$

答案: A

16. 在 $(1+2x)^8$ 的展开式中, x^2 的系数为 ()

A. 16

B. 28

C. 56

D. 112

答案: D

17. 曲线 $y=x^3-4x+2$ 在点 (1, -1) 处的切线方程为 ()

A. $x-y-2=0$

B. $x-y=0$

C. $x+y=0$

D. $27+y-2=0$

答案: C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

18. 若平面向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $x =$ _____.

答案: $-\frac{1}{2}$

19. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$, 则 $a =$ _____.

答案: 3

20. 复数 $\frac{2-2i}{(1+i)^2}$ 的模为 _____.

答案: $\sqrt{2}$

21. 已知球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 平面 α 截该球所得圆的半径为 $\sqrt{2}$, 则球心到 α 的距离为 _____.

答案: 1

三、解答题：本大题共 4 小题，共 49 分．解答应写出推理、演算步骤．

22. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $BC=3$, $B=60^\circ$, BD 为 AC 边上的高. 求 AC , BD .

解: 由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 7,$$

故 $AC = \sqrt{7}$.

$\triangle ABC$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times BD,$$

$$\text{解得 } BD = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

23. (本小题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_1 + a_2 = 10$, $a_2 + a_3 = 6$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 5 项和.

解: (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由已知得

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 10, \\ a_1(q+q^2) = 6, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = -3 \end{cases} \text{ (舍去)}, \begin{cases} a_1 = 8, \\ q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\text{(II) } \{a_n\} \text{ 的前 5 项和为 } \frac{8\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2}.$$

24. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x \cos x - \sin x, x \in [0, 2\pi]$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

解: (I) 由 $f(x) = x \cos x - \sin x$, 得 $f'(x) = -x \sin x$.

令 $f'(x) = 0$, 又 $x \in (0, 2\pi)$, 解得 $x = \pi$.

当 $0 < x < \pi$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $\pi < x < 2\pi$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \pi)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\pi, 2\pi)$.

(II) $f(0) = 0, f(\pi) = -\pi, f(2\pi) = 2\pi$.

根据 (I) 的结果, 当 $x = \pi$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\pi$; 当 $x = 2\pi$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2π .

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 斜率为 1 的直线 l 与 C 相交, 其中一个交点的坐标为 $(2,$

$\sqrt{2})$, 且 C 的右焦点到 l 的距离为 1.

(I) 求 a, b ;

(II) 求 C 的离心率.

解: (I) 由已知, 直线 l 的方程为 $x - y - 2 + \sqrt{2} = 0$.

设 C 的右焦点为 $(c, 0)$, 其中 $c > 0$. 由已知得 $\frac{|c - 2 + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$,

解得 $c = 2 - 2\sqrt{2}$ (舍去), $c = 2$,

所以 $a^2 = b^2 + 4$.

因为点 $(2, \sqrt{2})$ 在椭圆上, 所以 $\frac{4}{b^2 + 4} + \frac{2}{b^2} = 1$,

解得 $b = -2$ (舍去), $b = 2$, 所以 $a = 2\sqrt{2}$.

(II) C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.