

绝密★启用前

2025 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

# 数学(理工农医类)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 统分人签字 |
|----|---|---|---|----|-------|
| 分数 |   |   |   |    |       |

## 第 I 卷(选择题,共 84 分)

| 得分 | 评卷人 |
|----|-----|
|    |     |

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  【    】
  - $\{0, 1, 2, 3\}$
  - $\{1, 2, 3\}$
  - $\{0, 1, 2\}$
  - $\{1, 2\}$
- 函数  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3-x}}$  的定义域是 【    】
  - $\{x \mid x > 3\}$
  - $\{x \mid x < 3\}$
  - $\{x \mid x > 4\}$
  - $\{x \mid x < 4\}$
- 已知向量  $a = (3, m)$ ,  $b = (2, -3)$ , 若  $a \cdot b = 0$ , 则  $m =$  【    】
  - 1
  - $-\frac{1}{2}$
  - $\frac{1}{2}$
  - 2
- 在  $\triangle ABC$  中,  $B = 120^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ , 则  $AC =$  【    】
  - $\sqrt{5}$
  - $\sqrt{6}$
  - $\sqrt{7}$
  - $2\sqrt{2}$

- 双曲线  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$  的离心率为 【    】
  - $\frac{\sqrt{5}}{2}$
  - $\sqrt{5}$
  - 4
  - 5

- 不等式  $|-2x + 3| < 5$  的解集为 【    】
  - $(-\infty, -1)$
  - $(-1, 4)$
  - $(4, +\infty)$
  - $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

- 函数  $y = f(x)$  的图像与函数  $y = 2^{x-1}$  的图像关于  $x$  轴对称, 则  $f(x) =$  【    】
  - $2^{-x-1}$
  - $-2^{x-1}$
  - $2^{1-x}$
  - $-2^{-x-1}$

- 下列函数中, 为增函数的是 【    】
  - $y = \sin 3x$
  - $y = 2e^{1-x}$
  - $y = -\ln x$
  - $y = e^{2x-1}$

- 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点到直线  $4x - 3y + 6 = 0$  的距离为 【    】
  - $2\sqrt{5}$
  - $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
  - 2
  - $\frac{6}{5}$

- 已知  $a = \log_3 3$ ,  $b = 2^{2^4}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ , 则 【    】
  - $c < b < a$
  - $a < c < b$
  - $c < a < b$
  - $a < b < c$

- 抛 4 枚质地均匀的硬币, 恰好 1 枚硬币正面朝上的概率是 【    】
  - $\frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{8}$
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{5}{8}$

12. 设  $A, B$  为平面上两个定点,  $P$  为该平面上的动点, 若  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ , 则  $P$  的轨迹为 【    】

- A. 圓  
B. 橢圓  
C. 拋物線  
D. 雙曲線

**第Ⅱ卷(非选择题,共66分)**

|     |     |
|-----|-----|
| 得 分 | 评卷人 |
|     |     |

二、填空题(本大题共3小题,每小题7分,共21分)

13. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$ , 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为\_\_\_\_\_.

14. 点  $(m, n)$  在圆  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$  上, 则  $m^2 + n^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 有 3 个相同的球, 编号分别为 1, 2, 3. 从中有放回地随机取 2 次, 每次取 1 个球, 则编号为 3 的球恰好被取出 1 次的概率是\_\_\_\_\_.

|     |     |
|-----|-----|
| 得 分 | 评卷人 |
|     |     |

三、解答题(本大题共3小题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = 7\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ), 其图像的相邻两条对称轴间的距离为 3.

- (I) 求  $\omega$ ;  
(II) 求  $f(x)$  在区间  $[0, 3]$  的最大值.

17. (本小题满分 15 分)

已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_{n+1} = pa_n - p$ .

- (I) 若  $p = 3$ , 求  $a_1$ ;  
(II) 若  $|a_n|$  的公差为 0, 求  $p$ .

18. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = x + \frac{1}{3}ax^3$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 若  $a = -1$ , 求  $f(x)$  的单调区间.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. 【答案】 D

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是集合的运算.

【应试指导】 同时出现在两个集合中的元素是 1 和 2, 因此  $A \cap B = \{1, 2\}$ .

2. 【答案】 B

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是函数的定义域.

【应试指导】 函数定义域需满足分母中的二次根式有意义, 故需满足  $3 - x > 0$ , 因此  $x < 3$ , 所以定义域是  $\{x | x < 3\}$ .

3. 【答案】 D

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是向量的运算.

【应试指导】  $a \cdot b = 3 \times 2 + m \cdot (-3) = 0$ , 解得  $m = 2$ .

4. 【答案】 C

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是余弦定理.

【应试指导】 由余弦定理得  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 + 2 = 7$ , 所以  $AC = \sqrt{7}$ .

5. 【答案】 A

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是双曲线的离心率.

【应试指导】 由题可知  $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ,  $b = \sqrt{5}$ , 所以  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20 + 5} = 5$ , 因此离心率为  $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

6. 【答案】 B

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是绝对值不等式.

【应试指导】  $| -2x + 3 | < 5 \Leftrightarrow -5 < -2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -8 < -2x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 4$ , 所以解集为  $(-1, 4)$ .

7. 【答案】 B

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是函数图像的对称性.

【应试指导】 函数  $y = f(x)$  的图像与  $y = 2^{x-1}$  的图像关于  $x$  轴对称, 意味着对于相同的  $x$ , 对应的  $y$  值互为相反数, 因此  $f(x) = -2^{x-1}$ .

8. 【答案】 D

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是函数的单调性.

【应试指导】 选项 A 是周期函数, 在定义域内既有递增区间也有递减区间, 不是增函数; 选项 B、C 在定义域内是单调递减函数; 选项 D 在  $\mathbb{R}$  上是单调递增函数.

9.【答案】C

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是抛物线的性质及点到直线的距离.

【应试指导】 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点坐标为  $(\frac{p}{2}, 0) = (1, 0)$ , 代入点到直线的距离公式可得焦点到直线  $4x - 3y + 6 = 0$  的距离为  $\frac{|4 \times 1 - 3 \times 0 + 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$ .

10.【答案】C

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是指数函数和对数函数的性质.

【应试指导】  $a = \log_3 3 > \log_3 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = c, a = \log_3 3 < \log_3 5 = 1, b = 2^{0.4} > 2^0 = 1$ , 所以  $c < a < b$ .

11.【答案】A

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是独立重复试验的概率.

【应试指导】 单次抛掷正面朝上的概率为  $\frac{1}{2}$ , 则恰好有 1 枚正面朝上的概率为  $C_4^1 \cdot (\frac{1}{2})^1 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ .

12.【答案】A

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是圆.

【应试指导】 向量的数量积为 0 表示向量垂直, 即  $\vec{PA} \perp \vec{PB}$ , 根据几何意义, 平面内, 若动点  $P$  与两个定点  $A, B$  的连线互相垂直, 则  $P$  的轨迹是以  $AB$  为直径的圆 (直径所对的圆周角为直角). 因此,  $P$  的轨迹是圆.

## 二、填空题

13.【答案】 $2^n - 1$

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是等比数列.

【应试指导】 由  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$ , 可知  $\{a_n\}$  是首项  $a_1 = 1$ 、公比  $q = 2$  的等比数列. 由等比数列前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$ .

14.【答案】16

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是圆的性质.

【应试指导】  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$ , 所以圆心为  $C(3, -4)$ , 半径  $r = 1$ . 点  $(m, n)$  在圆上,  $m^2 + n^2$  表示该点到原点  $O(0, 0)$  距离的平方,  $|OC| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = 5$ , 原点在圆外, 所以圆上点到原点的最小距离为  $d_{\min} = |OC| - r = 5 - 1 = 4$ , 因此  $m^2 + n^2$  的最小值  $= (d_{\min})^2 = 4^2 = 16$ .

15.【答案】 $\frac{4}{9}$

【考点点拨】 本题主要考查的知识点是古典概型的概率.

【应试指导】 有放回地取 2 次, 每次有 3 种选择, 总事件数为  $3 \times 3 = 9$ . 第一次取到 3, 第二次取到 1 或 2 有  $1 \times 2 = 2$  种, 第一次取到 1 或 2, 第二次取到 3 有  $2 \times 1 = 2$  种, 所以编号为 3 的球恰好被取出 1 次的事件数为  $2 + 2 = 4$ , 因此所求概率为  $\frac{4}{9}$ .

## 三、解答题

16. (I) 正弦函数图像的相邻两条对称轴间的距离是周期的  $\frac{1}{2}$ ,

已知相邻对称轴间的距离为 3, 因此  $\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6$ ,

由正弦函数的周期公式  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6$ , 解得  $\omega = \frac{\pi}{3}$ .

(II) 由 (I) 可知  $f(x) = 7\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3})$ ,

当  $0 \leq x \leq 3$  时,  $\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ .

由正弦函数的性质知, 当  $\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{1}{2}$  时  $f(x)$  取得最大值,

故  $f(x)$  在区间  $[0, 3]$  上的最大值为  $f(\frac{1}{2}) = 7\sin \frac{\pi}{2} = 7$ .

17. (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $a_{n+1} = a_n + d$ .

已知  $a_{n+1} = 3a_n - 3$ ,

结合等差数列性质得  $a_n + d = 3a_n - 3 \Rightarrow d = 2a_n - 3$ ,

由于数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 所以  $d$  是常数, 与  $n$  无关,  $2a_n$  必须为常数, 即  $\{a_n\}$  是常数数列,

因此  $d = 0$ , 此时  $a_n = \frac{3}{2}$ , 即  $a_1 = \frac{3}{2}$ .

(II)  $a_n + d = pa_n - p \Rightarrow d = (p - 1)a_n - p$ ,

由于  $d$  是常数, 与  $n$  无关, 所以  $(p - 1)a_n$  必须为常数,

但  $d \neq 0 \Rightarrow \{a_n\}$  不是常数数列,

因此必须  $p - 1 = 0$ , 即  $p = 1$ .

18. (I)  $f(0) = 0$ , 故切点为  $(0, 0)$ ,

$\because f'(x) = 1 + ax^2$ ,

$\therefore f'(0) = 1 + a \cdot 0^2 = 1$ ,

$\therefore$  曲线在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$ , 即  $y = x$ .

(II)  $a = -1$  时  $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$ ,

$f'(x) = 1 - x^2$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \pm 1$ ,

当  $x < -1$  或  $x > 1$  时  $f'(x) < 0$ ,

当  $-1 < x < 1$  时  $f'(x) > 0$ ,

$\therefore f(x)$  的单调递增区间为  $(-1, 1)$ , 单调递减区间为  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$ .