

目 录

第一部分 代 数

第一章 数、式、方程和方程组(预备知识)	(1)
第二章 集合和简易逻辑	(1)
第三章 函 数	(2)
第四章 不等式和不等式组	(6)
第五章 数 列	(8)
第六章 复 数	(9)
第七章 导 数	(11)

第二部分 三 角

第八章 三角函数及其有关概念	(13)
第九章 三角函数式的变换	(15)
第十章 三角函数的图像和性质	(16)
第十一章 解三角形	(17)

第三部分 平面解析几何

第十二章 平面向量	(17)
第十三章 直 线	(20)
第十四章 圆锥曲线	(21)

第四部分 立体几何

第十五章 直线和平面	(24)
第十六章 空间向量	(26)
第十七章 多面体和旋转体	(27)

第五部分 概率与统计初步

第十八章 排列、组合与二项式定理	(29)
第十九章 概率与统计初步	(30)

第一部分 代数

第一章 数、式、方程和方程组(预备知识)

本章考纲未作要求,但本章是以后章节的预备知识,考生可自行学习.

第二章 集合和简易逻辑

考点 1 集合的表示方法

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来并写在大括号内.

2. 描述法

把集合中元素的共同特性描述出来写在大括号内.

3. 图示法(韦恩氏图)

用封闭曲线的内部表示一个集合,例如:(图 2-1).

考点 2 集合与集合的关系

1. 子集

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 B 叫做集合 A 的子集,记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$,读作 B 包含于 A 或 A 包含 B .

对于任一集合 A ,规定 $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$.

如果 $A \supseteq B, B \supseteq C$,那么 $A \supseteq C$.

真子集:如果集合 B 是集合 A 的子集,并且 A 中至少有一个元素不属于 B ,那么集合 B 叫做集合 A 的真子集(图 2-2),记作 $B \subsetneq A$ 或 $A \supsetneq B$.读作 B 真包含于 A 或 A 真包含 B .

常见的几种数集之间有如下关系:

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$$

集合相等:对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,那么就说集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$.

2. 交集

由集合 A 与集合 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集(图 2-3 阴影部分所示),记作 $A \cap B$,读作 A 交 B .

显然 $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$.

3. 并集

由集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起构成的集合叫做 A 与 B 的并集(图 2-4 阴影部分所示),记作 $A \cup B$,读作 A 并 B .

显然 $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A$.



图 2-4

4. 补集

全集:在研究集合与集合之间的关系时,这些集合都是某一个给定集合的子集,那么称这个给定的集合为这些集合的全集,用符号 U 表示.

补集:已知全集 U ,集合 $A \subseteq U$,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫集合 A 在集合 U 中的补集(图 2-5 阴影部分所示),记做 $\complement_U A$,读作 A 在 U 中的补集(或 A).

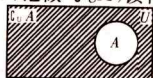


图 2-5

显然: $A \cup \complement_U A = U, A \cap \complement_U A = \emptyset, \complement_U(\complement_U A) = A$.

考点 3 简易逻辑

任何一个数学命题都有条件和结论两部分,如果把条件和结论分别用 A, B 表示,那么命题可以写成“如果 A 成立,那么 B 成立”,或简写成“若 A , 则 B ”.

如果 A 成立,那么 B 成立,即 $A \Rightarrow B$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分条件.

如果 B 成立,那么 A 成立,即 $B \Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的必要条件.

如果 A 既是 B 成立的充分条件,又是 B 成立的必要条件,即既有 $A \Rightarrow B$,又有 $B \Rightarrow A$,这时我们就说条件 A 是 B 成立的充分必要条件,简称充要条件.

第三章 函 数

§ 3.1 函数(1)

考点 1 函数的概念和性质

1. 函数的定义

如果在某变化过程中有两个变量 x, y ,并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值,按照某个对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应,那么 y 就是 x 的函数, x 叫做自变量,可以记作 $y = f(x)$ (其中 f 表示对应法则).

自变量 x 的取值范围叫函数的定义域,和 x 的值对应的 y 的值叫函数值,函数值的集合叫函数的值域.

定义域、值域及对应法则称为函数的三要素.

求函数定义域时,有以下几个原则:

(1) 当函数式为分式时,分式的分母不等于零.

(2) 当函数式为偶次根式时,被开方数(或式)大于等于零.

(3) 当函数式为零次幂时,底数不等于零.

(4) 当函数式为对数时,真数大于零,底数大于零且不等于 1.

函数定义域有两种表示方法:集合法与区间法.

2. 函数的性质

(1) 单调性:对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$),我们就说 $f(x)$ 在这个区间上是增(减)函数,在某一区间上的增函数或减函数叫在这个区间上的单调函数,这个区间叫这个函数的单调区间.

(2) 奇偶性:对于函数 $f(x)$,如果对于定义域内的任意一个 x , $-x$ 也在定义域内,且 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$),函数 $f(x)$ 叫奇(偶)函数.奇(偶)函数的图像关于原点(y 轴)对称.

注:奇、偶函数的定义域一定是关于原点对称的数集.

(3) 周期性:对于函数 $y = f(x)$,如果存在一个非零常数 T ,使得当 x 取定义域内的每一个值时,都有 $f(x+T) = f(x)$ 成立,那么函数 $y = f(x)$ 叫做周期函数,常数 T 叫做这个函数的周期.周期函数的周期不唯一,如果在所有周期中存在一个最小正数,这个最小正数叫做函数的最小正周期.

3. 反函数的概念

(1) 定义

如果对于函数 $y = f(x)$ 的每一个确定的函数值 y_0 , x 都有唯一确定的自变量 x_0 和 y_0 对应,那么就可以得到一个以 y 为自变量,以对应的 x 值为函数值的函数,这个函数叫原来函数的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,习惯上用 x 表示自变量, y 表示函数,把函数 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)$.

(2) 互为反函数的函数的定义域和值域

$y = f(x)$ 的定义域、值域分别是 $y = f^{-1}(x)$ 的值域、定义域.

(3) 互为反函数的函数的图像

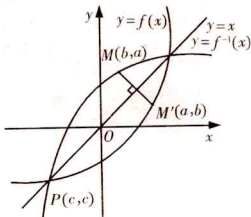


图 3-1

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称(图 3-1).从图 3-1 可以看出,函

数 $y = f(x)$ 的图像上任意点 (a, b) 都与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上的任意点 (b, a) 关于直线 $y = x$ 对称, 因此 $y = f(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(4) 求反函数的步骤

如果 $y = f(x)$ 有反函数, 那么求 $y = f(x)$ 的反函数的步骤是:

① 求出函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域.

② 从 $y = f(x)$ 中解出 x , 即 $x = f^{-1}(y)$.

③ 把 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x, y 对调, 改为 $y = f^{-1}(x)$.

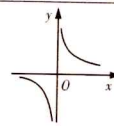
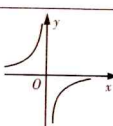
④ 在 $y = f^{-1}(x)$ 后面写上定义域.

考点 2 正比例函数、反比例函数和一次函数

1. 正比例函数和一次函数

		正比例函数		一次函数	
解析式		$y = kx (k \text{ 为常数且 } k \neq 0)$		$y = kx + b (k, b \text{ 是常数且 } k \neq 0)$	
定义域		$x \in \mathbf{R}$		$x \in \mathbf{R}$	
值域		$y \in \mathbf{R}$		$y \in \mathbf{R}$	
图 像		$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
					
		$ k $ 越大, 直线越远离 x 轴; $ k $ 越小, 直线越靠近 x 轴		$ k $ 越大, 直线越远离经过点 $(0, b)$ 的 x 轴的平行线; $ k $ 越小, 直线越靠近经过点 $(0, b)$ 的 x 轴的平行线	
		经过原点、斜率为 k 的直线		经过点 $(0, b)$ 、斜率为 k 的直线	
性 质	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数
	奇偶性	奇函数		非奇非偶函数	

2. 反比例函数

解析式		$y = \frac{k}{x} (k \neq 0 \text{ 的常数})$	
定义域		$\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq 0\}$	
值域		$\{y \mid y \in \mathbf{R}, \text{ 且 } y \neq 0\}$	
图 像		$k > 0$	$k < 0$
			
		以 x 轴、 y 轴为渐近线的等轴双曲线; $ k $ 越大, 两个分支离原点越远	
性 质	单调性	在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内是减函数	在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内是增函数
	奇偶性	奇函数	

考点 3 二次函数

1. 函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像和性质

函数 $y = ax^2$ 的图像是以原点为顶点, 以 y 轴为对称轴的抛物线.

函数 $y = ax^2$ 有以下性质:

(1) 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点在原点, 以 y 轴为对称轴.

(2) 当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 在 x 轴的上方 (顶点在坐标原点), 它的图像开口向上, 并且向上无限伸展; 当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 在 x 轴的下方 (顶点在坐标原点), 它的图像开口向下, 并且向下无限伸展.

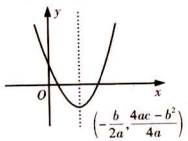
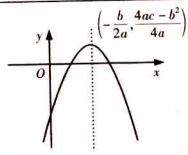
(3) 当 $a > 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而减小; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而增大; 函数 y 在顶点处的值最小. 当 $a < 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而增大; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而减小; 函数 y 在顶点处的值最大.

(4) $|a|$ 越大, 抛物线的开口越小; $|a|$ 越小, 抛物线的开口越大.

2. 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像和性质

一般地, 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像与函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像是形状相同的抛物线, 只是位置不同, 由于 $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 所以, 它的图像可以通过 $y = ax^2$ 的图像平移而得到: 当 $\frac{b}{2a} > 0$ 时, 向左平移 $|\frac{b}{2a}|$ 个单位, 当 $\frac{b}{2a} < 0$ 时, 向右平移 $|\frac{b}{2a}|$ 个单位, 当 $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ 时, 向上平移 $|\frac{4ac - b^2}{4a}|$ 个单位, 当 $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ 时, 向下平移 $|\frac{4ac - b^2}{4a}|$ 个单位, 可得到 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像.

函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像和性质如下表:

	$a > 0$	$a < 0$
图 像		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$
对称性	关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称	关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称
单调性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数
最大值 与最小值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

§ 3.2 函数(2)

考点 4 指 数

1. 基本概念

(1) 正整数指数幂: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n (n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1)$.

(2) 零指数幂: $a^0 = 1 (a \neq 0)$.

(3) 负整数指数幂: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbf{N})$.

(4) 根式与有理数指数幂

n 次方根: 若 $x^n = a (n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1)$, 则 x 叫 a 的 n 次方根.

算术根: 正数 a 的正的 n 次方根叫 a 的 n 次算术根.

根式: 当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时, 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫根式.

正分数指数幂: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a \geq 0, m, n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1, m, n$ 互质).

负分数指数幂: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1, m, n$ 互质).

整数指数幂、分数指数幂统称为有理数指数幂.

2. 幂的运算法则

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) $(ab)^n = a^n b^n$.

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n} (b \neq 0)$.

其中 $m, n \in \mathbf{R}$.

考点 5 对数

1. 定义

如果 $a^b = N (a > 0$ 且 $a \neq 1)$, 那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N = b$, 其中 a 叫做底数, N 叫做真数.

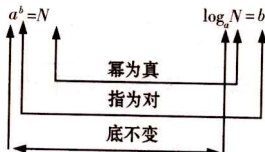


图 3-2

2. 指数式与对数式的互化(图 3-2)

3. 性质

(1) 底的对数等于 1 $\log_a a = 1$.

(2) 1 的对数等于 0 $\log_a 1 = 0$.

(3) 零和负数无对数.

(4) 对数恒等式 $a^{\log_a N} = N (N > 0)$.

(5) 当底数大于 1 时, 大于 1 的真数的对数为正, 大于 0 小于 1 的真数的对数为负; 当底数小于 1 而大于 0 时, 小于 1 而大于 0 的真数的对数为正, 大于 1 的真数的对数为负.

4. 运算法则

(1) $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$.

(4) $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M (M > 0, n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1)$.

注: 以上 $M > 0, N > 0, a > 0$ 且 $a \neq 1$.

5. 换底公式

$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, 在对数的计算中, 我们可以用此公式把一个对数换成需要的底数, 从而简化运算.

考点 6 指数函数和对数函数

指数函数和对数函数的函数式、定义域、图像与性质如下表所示:

	指数函数	对数函数
函数式	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
图 像		
性 质	1 $y > 0$ (图像在 x 轴上方)	$x > 0$ (图像在 y 轴右方)
	2 $a^0 = 1$ (图像过 $(0,1)$ 点)	$\log_a 1 = 0$ (图像过 $(1,0)$ 点)
	3 $a > 1$ 时, $a^x \begin{cases} > 1 & (x > 0) \\ = 1 & (x = 0) \\ < 1 & (x < 0) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 & (x > 0) \\ = 1 & (x = 0) \\ > 1 & (x < 0) \end{cases}$	$a > 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} > 0 & (x > 1) \\ = 0 & (x = 1) \\ < 0 & (0 < x < 1) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} < 0 & (x > 1) \\ = 0 & (x = 1) \\ > 0 & (0 < x < 1) \end{cases}$
	4 $a > 1$ 时, a^x 是增函数 $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数	$a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数
	5 $a > 1$ 时, 底数越大, 函数图像越靠近 y 轴 $0 < a < 1$ 时, 底数越小, 函数图像越靠近 y 轴	$a > 1$ 时, 底数越大, 函数图像越靠近 x 轴 $0 < a < 1$ 时, 底数越小, 函数图像越靠近 x 轴

第四章 不等式和不等式组

考点 1 不等式的性质

如果 $a > b$, 那么 $b < a$; 如果 $a < b$, 那么 $b > a$;

如果 $a > b, b > c$, 那么 $a > c$;

如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$;

如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$; 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$;

如果 $a > b, c > d$, 那么 $a + c > b + d$;

如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $ac > bd$;

如果 $a > b, ab > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

如果 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n > 1)$;

如果 $a > b > 0$, 那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$;

$|a + b| \leq |a| + |b| (a, b \in \mathbf{R}, \text{且当 } a, b \text{ 同号时取等号})$.

考点 2 基本不等式

1. 如果 $a \in \mathbf{R}$, 那么 $a^2 \geq 0$ (当且仅当 $a = 0$ 时, 有 $a^2 = 0$).

2. 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a = b$ 时, 有 $a^2 + b^2 = 2ab$).

3. 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a \geq 0, b \geq 0$, 那么 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (当且仅当 $a = b$ 时, 有 $a + b = 2\sqrt{ab}$), 此式通常称为均值定理, 用它可以求函数的最大值或最小值, 若 $a + b$ 为定值, 当 $a = b$ 时, ab 有最大值为 $\frac{(a+b)^2}{4}$; 若 ab 为定值, 当 $a = b$ 时, $a + b$ 有最小值为 $2\sqrt{ab}$.

4. 若 $a > 0$, 则 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (当且仅当 $a = 1$ 时, 有 $a + \frac{1}{a} = 2$).

考点 3 解不等式

一个含有未知数的不等式中, 能使不等式成立的未知数的所有可取值的集合叫做不等式的解集, 求不等式解集或证明不等式无解的过程叫解不等式.

考点 4 一元一次不等式

一元一次不等式解的情况可分为以下两种类型:

(1) 当 $a \neq 0$ 时, 若 $a > 0$, 则 $ax > b$ 的解集为 $\{x \mid x > \frac{b}{a}\}$; 若 $a < 0$, 则 $ax > b$ 的解集为 $\{x \mid x < \frac{b}{a}\}$.

(2) 当 $a = 0$ 时, 若 $b \geq 0$, 则 $ax > b$ 无解, 即解集为 $\emptyset$; 若 $b < 0$, 则 $ax > b$ 的解集为全体实数, 即解的集合为 $\mathbf{R}$.

考点 5 一元一次不等式组

由两个一元一次不等式所组成的不等式组的解集可以归结为以下四种类型:

类型(设 $a < b$)	解集	数轴表示
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$	$x > b$	
$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$	$x < a$	
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$	$a < x < b$	
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$	空集	

考点 6 可化为一元一次不等式组求解的两类不等式

1. 不等式 $(ax+b)(cx+d) > 0$ 及 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 型的解法

上面两个不等式均可化成如下两个不等式组

$$\begin{cases} ax+b > 0 \\ cx+d > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d < 0 \end{cases}$$

即不等式 $(ax+b)(cx+d) > 0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 的解集, 就是以上两个不等式组解集的并集.

2. 不等式 $(ax+b)(cx+d) < 0$ 及 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 型的解法

上面两个不等式均可化成如下两个不等式组

$$\begin{cases} ax+b > 0 \\ cx+d < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d > 0 \end{cases}$$

同样, 不等式 $(ax+b)(cx+d) < 0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 的解集, 就是以上两个不等式组解集的并集.

考点 7 一元二次不等式的解法

常用的有以下两种方法:

(1) 因式分解法. 当二次三项式 ax^2+bx+c 容易分解为两个一次因式的乘积时, 可以把一元二次不等式化为两个一元一次不等式组求解, 两不等式组的解集的并集就为一元二次不等式的解集.

(2) 图像法. 利用一元二次不等式与相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a > 0$) 的有关性质求解, 解集情况如下表:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像			

(续表)

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两个不相等的实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x < x_1$ 或 $x > x_2\}$ 即 $(-\infty, x_1) \cup$ $(x_2, +\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbf{R},$ $x \neq -\frac{b}{2a}\}$ 即 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ $\cup (-\frac{b}{2a}, +\infty)$	$\mathbf{R}$ 即 $(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$ 即 (x_1, x_2)	$\emptyset$	$\emptyset$

考点 8 绝对值不等式

1. 绝对值的性质

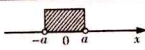
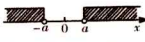
设两实数 a, b , 则有

(1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(2) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$.

(3) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

2. 绝对值不等式的解法

类型(设 $a > 0$)	解 集	数 轴 表 示
$ x < a$	$\{x \mid -a < x < a\}$	
$ x > a$	$\{x \mid x > a \text{ 或 } x < -a\}$	

第五章 数 列**考点 1 数列的通项公式和前 n 项和**

1. 数列的通项公式

一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 的关系, 如果可以用一个公式来表示, 这个公式就叫做这个数列的通项公式.(1) 知道一个数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 就可以依次用 $1, 2, 3, \dots$ 代替公式里的 n , 求出这个数列的各项.

(2) 并不是所有的数列都有通项公式.

2. 数列的前 n 项和(1) 数列的前 n 项和一般用 S_n 表示, 即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.(2) 已知 S_n 求 a_n 时可用公式 $a_n = \begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$ **考点 2 等差数列和等比数列**

	等 差 数 列	等 比 数 列
定义	如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 公差常用字母 d 表示. $d = a_{n+1} - a_n$	如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比等于同一个常数, 这个数列就叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 公比常用字母 q 表示. $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, q \neq 0$

(续表)

	等差数列	等比数列
一般形式	$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$	$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
中项	如果 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫做 a 和 b 的等差中项, 且 $A = \frac{a+b}{2}$ 或 $a+b = 2A$	如果 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 和 b 的等比中项, 且 $G^2 = ab$ 或 $G = \pm \sqrt{ab}$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$ 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$
性质	如果 $m+n = p+q$ 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ $S_{2n-1} = (2n-1) \cdot a_n$ $a_m = a_n + (m-n)d$ 当项数为 $2n$ 时, $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{中间两项之比}$ $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$ 当项数为 $2n-1$ 时, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1} = \frac{\text{奇数项个数}}{\text{偶数项个数}}$ $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n = \text{中间项}$ 其中数列 $\{a_n\}$ 的奇数项之和为 $S_{\text{奇}}$, 偶数项之和为 $S_{\text{偶}}$	如果 $m+n = p+q$ 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ 其中的 $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ 当总项数为 $2n$ 时, $S_{\text{偶}} = S_{\text{奇}} \cdot q$

第六章 复数

考点 1 复数的概念

1. 复数的定义

形如 $a+bi$ ($a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$) 的数叫做复数, a 叫做复数的实部, b 叫做复数的虚部. 当 $b=0$ 时, 就是实数; 当 $b \neq 0$ 时, 叫虚数; 当 $a=0$ 时, $b \neq 0$ 时, 叫纯虚数. 全体复数的集合通常简称复数集, 记作 $\mathbf{C}$. 实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集.

$$\text{复数}(a+bi) \begin{cases} \text{实数}(b=0) \\ \text{虚数}(b \neq 0) \end{cases} \begin{cases} \text{纯虚数}(a=0, b \neq 0) \\ \text{非纯虚数}(a \neq 0, b \neq 0) \end{cases}$$

2. 复数的相等

(1) 复数的相等的充要条件是实部与虚部分别相等.

(2) 复数 $a+bi=0$ 的充要条件是 $a=0, b=0$.

注: 两个实数可以比较大小, 但两个复数, 如果不全是实数, 不能比较大小.

考点 2 复数的表示方法

1. 复数的形式

$$\text{复数的形式} \begin{cases} \text{代数形式} & z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \\ \text{几何形式} & \begin{cases} \text{坐标表示} & Z(a, b) \\ \text{向量表示} & \overrightarrow{OZ} \end{cases} \\ \text{三角形式} & r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases}$$

2. 复数的代数形式, 三角形式的互化关系式

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

根据 a, b 的符号可确定复数 $z = a + bi$ 的辐角的主值所在范围, 如下表所示:

a	b	辐角终边所在象限	辐角的主值范围
+	+	I	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
-	+	II	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
-	-	III	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
+	-	IV	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

考点 3 复数的运算

$$Z_1 = a + bi = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), Z_2 = c + di = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

	代数形式	三角形形式	几何形式
加法 减法	$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$		以 $\vec{OZ_1}$ 和 $\vec{OZ_2}$ 为边, 作平行四边形的对角线 $\vec{OZ} = \vec{OZ_1} + \vec{OZ_2}$
乘法	$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$	$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	将向量 $\vec{OZ_1}$ 按照逆时针方向旋转一个角 θ_2 , 再将它模变为原来的 r_2 倍, 得 $\vec{OZ} = \vec{OZ_1} \cdot \vec{OZ_2}$
除法	$(a + bi) \div (c + di) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$	$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \div r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$	
乘方 (棣莫弗定理) 开方		$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) (n \in \mathbb{N})$ $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n})$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ($n \in \mathbb{N}$)	

第七章 导 数

§ 7.1 极 限

考点 1 函数极限的定义

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

(1) 当自变量 x 取正值且无限增大时, 如果函数 $y = f(x)$ 的值无限趋近于一个常数 A , 就说当 x 趋向于正无穷大时, 函数 $y = f(x)$ 的极限是 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$

(2) 当自变量 x 取负值而 $|x|$ 无限增大时, 如果函数 $y = f(x)$ 的值无限趋近于一个常数 A , 就说当 x 趋向于负无穷大时, 函数 $y = f(x)$ 的极限是 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$.

(3) 当自变量 x 的绝对值无限增大时, 如果函数 $y = f(x)$ 的值无限趋近于一个常数 A , 就说当 x 趋向于无穷大时, 函数 $y = f(x)$ 的极限是 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$.

(4) x 趋向无穷大时, 常数函数 $f(x) = C$ 的极限就是 C , 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} C = C$.

(5) x 趋向无穷大时, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的极限就是 0 , 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

(1) 当自变量 x 无限趋近于常数 x_0 (但 $x \neq x_0$) 时, 如果函数 $y = f(x)$ 无限趋近于一个常数 A , 就说当 x 趋向于 x_0 时, 函数 $y = f(x)$ 的极限是 A , 记作

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow A$.

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 常数函数 $f(x) = C$ 的极限就是这个常数, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x) = x$ 也无限趋近于 x_0 , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

(4) 对于函数 $y = f(x)$, 如果当 x 从点 x_0 的左(右)边无限地趋近于 x_0 时, $f(x)$ 无限地趋近于某一个常数 A , 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左(右)极限为 A , 记作

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$)

极限存在定理: 函数 $f(x)$ 在 x_0 点处极限存在的充分必要条件是: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

考点 2 函数极限的四则运算法则

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)] [\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = A \cdot B.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

§ 7.2 函数的连续性

考点 3 函数的连续性

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续

若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处及其附近有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一个点处都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 或称 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数.

3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

闭区间上的连续函数, 其图像是一条连续的曲线.

4. 连续函数的性质

(1) (最大值最小值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上必有最大值和最小值.

(2) 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 那么 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$,

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 在点 $x = x_0$ 处都连续.

5. 初等函数的连续性

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数都是基本初等函数,基本初等函数及常数经有限次四则运算及复合后所得到的函数,都是初等函数,它们在其定义域内每一点处都连续,因此,求初等函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的极限,即求 $f(x_0)$,但点 x_0 必须是 $f(x)$ 定义域内的点.

§ 7.3 导数的概念

考点 4 导数的有关概念

1. 导数的概念

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处的导数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ,当自变量 x 从 x_0 变为 x_1 时 ($x_1, x_2 \in D$),称 $x_1 - x_0$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量(也称改变量),记作 Δx ,即 $\Delta x = x_1 - x_0$,称 $f(x_1) - f(x_0)$ 为函数在 x_0 处的增量,记作 Δy ,即

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处及其附近有定义,当自变量由 x_0 变为 $x_0 + \Delta x$ 时,相应的函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

并称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导.

导数的几何意义:函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 等于函数 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率,相应的,过点 $(x_0, f(x_0))$ 的曲线的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

(2) 导函数

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都可导,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导,或称 $f(x)$ 为区间 (a, b) 内的可导函数,记作 $f'(x)$ 或 y' .

2. 基本初等函数的导数公式

$$C' = 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

3. 求导法则

(1) 和(或差)的导数

两个可导函数的和(或差)的导数,等于这两个函数的导数的和(或差).

$$\text{即 } (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

(2) 积的导数

两个可导函数的积的导数,等于第一个函数的导数乘第二个函数,再加上第一个函数乘第二个函数的导数.

$$\text{即 } (uv)' = u'v + uv'.$$

(3) 商的导数

两个可导函数的商的导数,等于分子的导数与分母的积减去分母的导数与分子的积,再除以分母的平方.

$$\text{即 } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

考点 5 导数的应用

1. 函数单调性的判定

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,

(1) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

(2) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

(3) 如果在 (a, b) 内, $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 为常量.

2. 函数的极值

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义,

(1) 若对于 x_0 附近的一切 x , 都有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) 若对于 x_0 附近的一切 x , 都有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

极值存在的充分条件:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近连续, 在 x_0 点处有 $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

(1) 当 $\begin{cases} x < x_0 \text{ 时}, f'(x_0) > 0 \\ x > x_0 \text{ 时}, f'(x_0) < 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

(2) 当 $\begin{cases} x < x_0 \text{ 时}, f'(x_0) < 0 \\ x > x_0 \text{ 时}, f'(x_0) > 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

(3) 如果无论 $x < x_0$, 还是 $x > x_0$, $f'(x_0)$ 存在且不变号(均为正数或均为负数), 则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

3. 函数的最值

函数的最大值与最小值统称为函数的最值.

函数的最大值与最小值是对函数的一个有定义的区间而言的.

设 $y = f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有导数, 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 可分为两步进行:

(1) 求 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的极值(极大值或极小值).

(2) 将 $y = f(x)$ 的各极值与 $f(a), f(b)$ 比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为最小值.

第二部分 三角

第八章 三角函数及其有关概念

考点 1 角的有关概念

1. 终边相同的角

如果角 α 与角 β 的顶点与顶点重合, 始边与始边重合, 它们的终边也重合, 那么角 α 与角 β 叫终边相同的角.

所有与 α 角的终边相同的角, 连同 α 角在内, 有无限多个, 可以用 $k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}$ 表示. 于是与 α 终边相同的角的集合可记作

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. 象限角

角的顶点与原点重合, 角的始边与 x 轴正方向重合, 终边落在哪个象限内, 这个角就叫做第几象限的角(或称这个角属于第几象限).

若 α 为第 I 象限的角, 则 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbf{Z})$;

若 α 为第 II 象限的角, 则 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi, (k \in \mathbf{Z})$;

若 α 为第 III 象限的角, 则 $(2k+1)\pi < \alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbf{Z})$;

若 α 为第 IV 象限的角, 则 $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2(k+1)\pi, (k \in \mathbf{Z})$.

注: 终边落在坐标轴上的角, 不属于任何象限.

考点 2 角的度量

1. 角度与弧度之间的换算关系

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度} \quad 180^\circ = \pi \text{ 弧度}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.017453 \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$$

2. 某些特殊的角度与弧度之间的对应关系

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

考点 3 任意角的三角函数

1. 定义

设 α 是一个任意大小的角, 角 α 终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 $r (r > 0)$ (图 8-1), 那么角 α 的六个三角函数定义如下:

$$\text{正弦函数} \quad \sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{余弦函数} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\text{正切函数} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad \text{余切函数} \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\text{正割函数} \quad \sec \alpha = \frac{r}{x} \quad \text{余割函数} \quad \csc \alpha = \frac{r}{y}$$

2. 任意角的三角函数值在各象限的符号 (图 8-2)

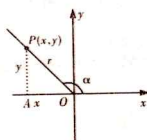


图 8-1

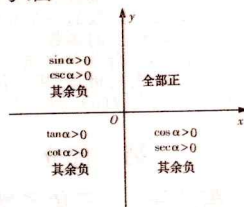


图 8-2

3. 特殊角的三角函数值

α	30°	45°	60°
角 α 的弧度数	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	0°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	不存在	0	不存在	0
$\cot \alpha$	不存在	0	不存在	0	不存在

第九章 三角函数式的变换

§ 9.1 同角三角函数之间的关系与诱导公式

考点 1 同角三角函数的基本关系式

倒数关系	$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$	$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$	$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$
商数关系	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$		
平方关系	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

考点 2 三角函数的诱导公式

1. $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$), $-\alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值, 前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号. 简而言之, “函数名不变, 符号看象限”.

诱导公式可列表如下:

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$k \cdot 360^\circ + \alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$

2. $90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 相应余函数的值, 前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号. 简而言之, “函数名改变(变为它的余函数), 符号看象限”.

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
$90^\circ - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

§ 9.2 两角和与差的三角函数及倍角公式

考点 3 两角和与差的三角函数

两角和与差的三角函数公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

考点 4 倍角公式

在两角和公式中, 令 $\alpha = \beta$, 则可得倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

第十章 三角函数的图像和性质

考点 1 正弦函数、余弦函数、正切函数的图像

1. 正弦函数的图像(图 10-1)

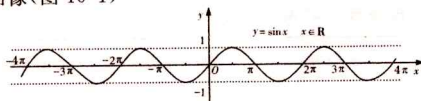


图 10-1

2. 余弦函数的图像(图 10-2)

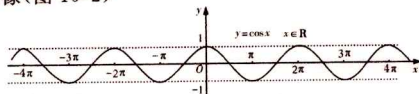


图 10-2

3. 正切函数的图像(图 10-3)

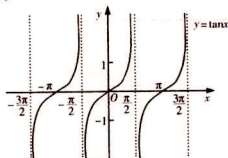


图 10-3

考点 2 正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的性质

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$ 最大值为 1 最小值为 -1	$[-1, 1]$ 最大值为 1 最小值为 -1	$\mathbf{R}$ 函数无最大值、最小值	$\mathbf{R}$ 函数无最大值、最小值
周期性	最小正周期为 2π	最小正周期为 2π	最小正周期为 π	最小正周期为 π
单调性	在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ 上是增函数, 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ 上是减函数($k \in \mathbf{Z}$)	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上是增函数, 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上是减函数($k \in \mathbf{Z}$)	在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ 内是增函数($k \in \mathbf{Z}$)	在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 内是减函数($k \in \mathbf{Z}$)
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数

考点 3 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期、最大值和最小值、图像

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

最大值为 $|A|$, 最小值为 $-|A|$, 其中 $A \neq 0, \omega \neq 0, \varphi$ 为常数且 x 为实数.

函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ (其中 A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0, x \in \mathbf{R}$)

的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin x$ 的图像之间的关系:

(1) $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像是由 $y = \sin x$ 的图像向左($\varphi > 0$)或向右($\varphi < 0$)平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的.

(2) $y = A\sin x$ 的图像是由 $y = \sin x$ 的图像的振幅扩大($|A| > 1$) $|A|$ 倍或振幅缩小($|A| < 1$) $|A|$ 而得到的.

(3) $y = \sin \omega x$ 的图像是由 $y = \sin x$ 的图像的周期扩大($|\omega| < 1$, 且 $\omega \neq 0$) $\frac{1}{|\omega|}$ 倍或缩小($|\omega| > 1$) $\frac{1}{|\omega|}$ 而得到的.

(4) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像是由 $y = \sin x$ 的图像向左或右平移 $\left| \frac{\varphi}{\omega} \right|$ 个单位, 周期扩大 $\frac{1}{|\omega|}$ 倍或缩小 $\frac{1}{|\omega|}$ 和振幅扩大 $|A|$ 倍或缩小 $|A|$ 而得到的. 图像的平移、周期和振幅的扩大或缩小都要依据 φ, ω, A 的符号和大小而定.

(5) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的画法, 用五点法可以画出 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图.

第十一章 解三角形

考点 1 解直角三角形

在直角三角形中, 由已知的角和边求未知的角和边的过程, 叫解直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 设角 C 为 90° , 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 那么

(1) $A + B = 90^\circ$.

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股定理).

(3) $\sin A = \cos B = \frac{a}{c}$, $\sin B = \cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \cot B = \frac{a}{b}$, $\tan B = \cot A = \frac{b}{a}$.

(4) $S = \frac{1}{2}ab$ (S 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积).

考点 2 解斜三角形

由斜三角形中三个元素 (至少有一个是边) 求其余三个未知元素 (可能有两解、一解或无解) 的过程, 叫做解斜三角形.

解斜三角形的方法	适用类型	备 注
余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	(1) 已知三边 (2) 已知两边及其夹角	类型 (1)、(2) 在有解时只有一解. 由两个三角形全等的判定定理得出
正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	(1) 已知两角与一边 (2) 已知两边及其中一边的对角	类型 (1) 在有解时只有一解. 类型 (2) 可有两解、一解或无解

第三部分 平面解析几何

第十二章 平面向量

考点 1 向量的概念

1. 定义: 既有大小又有方向的量叫做向量.

2. 表示法: 向量可用有向线段表示, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量, 直接说向量 $\overrightarrow{AB}$. 另外还常用黑体小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

3. 向量的模: 向量 a 的大小叫向量的模 (或长度), 记作 $|a|$.

4. 向量相等: 两个向量 a 和 b 同向且等长, 则称 a 和 b 相等, 记作 $a = b$.

5. 零向量: 长度等于 0 的向量叫做零向量, 记为 0 , 零向量的方向不定.

6. 相反向量: 与 a 大小相等, 方向相反的向量, 称为 a 的相反向量, 记作 $-a$, 特别有 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

7. 平行或共线向量: 如果若干向量的有向线段所在直线互相平行或重合, 则称这些向量平行或共线.

8. 单位向量: 长度等于 1 的向量称为单位向量, 与向量 a 同方向的单位向量叫 a 的单位向量, 记作 a_0 , $a_0 = \frac{a}{|a|}$.

考点 2 向量的加、减运算

1. 向量的加法运算

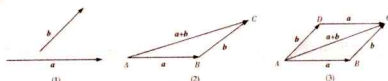


图 12-1

(1) 三角形法则

已知向量 a, b (图 12-1(1), (2)), 在平面上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{BC} = b$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$.

(2) 平行四边形法则

已知向量 a, b (图 12-1(1), (3)), 在平面上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为邻边作 $\square ABCD$, 则此平行四边形对角线上的向量 $\overrightarrow{AC} = a+b$.

(3) 向量的加法满足如下运算律

交换律

$$a+b=b+a$$

结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

多个向量相加 (图 12-2), 采用多边形法则: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

2. 向量的减法运算

$$a-b=a+(-b)$$

一个向量减去一个向量等于加上这个向量的相反向量. 一个向量 ($\overrightarrow{BA}$) 等于它的终点 (A) 的位置向量, 减去它的起点 (B) 的位置向量. 以减向量的终点为始点, 以被减向量的终点为终点的向量叫这两个向量的差.

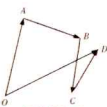


图 12-2

考点 3 数乘向量, 两向量共线的条件

1. 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量, 记作 λa 且 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$, 若 $a \neq 0$, 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反, 当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, $0a = 0$ 或 $\lambda 0 = 0$. 数乘向量满足下列运算法则 (a, b 为任意向量, λ, μ 为任意实数):

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a.$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

$$(3) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b.$$

2. 两个非零向量 a, b 共线的充要条件是有且只有一个实数 λ , 使得 $a = \lambda b$.

考点 4 平面向量的分解定理, 直线的向量参数方程

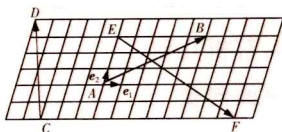


图 12-3

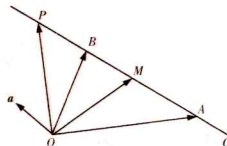


图 12-4

1. 平面向量的分解定理

如图 12-3, e_1, e_2 是两个不平行的向量, 则 $\overrightarrow{AB} = 5e_1 + 3e_2, \overrightarrow{EF} = 8e_1 - 5e_2, \overrightarrow{CD} = -2e_1 + 6e_2$.

如果 e_1 和 e_2 是同一平面上两个不共线的向量, 那么对于该平面上的任一向量 a , 存在唯一的一对实数 a_1, a_2 , 使得 $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$, 其中 $\{e_1, e_2\}$ 叫平面上的全体向量的一组基底, e_1, e_2 叫基向量.

2. 直线的向量参数方程

如图 12-4, 已知 A, B 是直线 l 上的任意两点, O 是 l 外的一点, 则点 P 在 l 上的充要条件是存在实数 t , 使 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \cdots (*)$, 则向量等式 $(*)$ 叫直线 l 的向量参数方程, 其中实数 t 叫参数, 在 $(*)$ 式中, 令 $t = \frac{1}{2}$, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 这时 P 是线段 AB 的中点 M , $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 这是线段 AB 的中点的向量表达式.

考点 5 向量的直角坐标运算

1. 在平面直角坐标系 Oxy 内, 分别取与 x, y 轴方向相同的两个单位向量 e_1, e_2 , 在 Oxy 平面上任一向量 a , 由平面向量分解定理可知存在唯一的有序实数对 (a_1, a_2) , 使得 $a = a_1e_1 + a_2e_2$, (a_1, a_2) 叫向量 a 在 Oxy 中的坐标, 记作 $a = (a_1, a_2)$, 其中 e_1, e_2 叫做直角坐标平面上的基底, 显然 $0 = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

2. 向量的坐标运算

(1) 设 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, 则

$$a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2);$$

$$a - b = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2);$$

$$\lambda a = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

3. 基本公式

(1) 向量的长度及两点间的距离公式

设 $a = (a_1, a_2)$, 则 $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(2) 点平移变换公式

若在直角坐标平面内的图形 F 上的所有点, 按向量 $a = (h, k)$ 平移到图形 F' , 则称图形 F 到 F' 的变换为平移变换.

如图 12-5, 已知点 $P_0(x_0, y_0)$, 向量 $a = (a_1, a_2)$, 将点 $P_0(x_0, y_0)$ 按向量 a 平移到点 $P(x, y)$, 则有

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + a$, 换用坐标表示:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (a_1, a_2), \text{ 即 } \begin{cases} x = x_0 + a_1 \\ y = y_0 + a_2 \end{cases}.$$

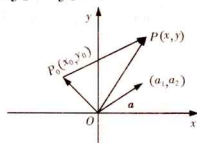


图 12-5

考点 6 向量的数量积

1. 向量的夹角

设两非零向量 a, b , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\angle AOB$ 就叫做向量 a 与 b 的夹角, 记作 $\langle a, b \rangle$, 且规定 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$, 当 $\langle a, b \rangle = 90^\circ$ 时, 则称 a 与 b 垂直, 记作 $a \perp b$; 当 $\langle a, b \rangle = 0^\circ$ 时, a 与 b 同向; 当 $\langle a, b \rangle = 180^\circ$ 时, a 与 b 反向.

2. 向量 a, b 的数量积

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle.$$

3. $a \cdot b$ 的几何意义

$a \cdot b$ 等于 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \theta$ 的乘积.

4. 向量的数量积的性质

(1) 两个向量的数量积是实数, 可以等于正数、负数或零.

(2) 若 e 为单位向量, 则 $a \cdot e = e \cdot a = |a| \cos \langle a, e \rangle$.

(3) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

(4) $a \cdot a = |a|^2$ 或 $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

$$(5) \cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}.$$

(6) $|a \cdot b| \leq |a| |b|$.

5. 在坐标平面 Oxy 内, 已知 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, 则 $a \cdot b = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

性质: $a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$; $a \parallel b \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

运算律: $a \cdot b = b \cdot a$; $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$; $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

第十三章 直线

考点 1 直线方程的五种形式

名称	已知条件	方程形式	说明
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴的截距 b	$y = kx + b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
点斜式	直线过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和斜率 k	$y - y_1 = k(x - x_1)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
两点式	直线过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
截距式	直线在 x 轴上的截距是 $a(a \neq 0)$ 直线在 y 轴上的截距是 $b(b \neq 0)$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线
一般式	A, B 不同时为零	$Ax + By + C = 0$	任何一条直线都可以写成此种形式

考点 2 两直线的位置关系

设两直线斜率都存在, 其方程分别为:

$$l_1: y = k_1x + b_1 \text{ (或 } A_1x + B_1y + C_1 = 0),$$

$$l_2: y = k_2x + b_2 \text{ (或 } A_2x + B_2y + C_2 = 0) (A_2, B_2, C_2 \text{ 不等于 } 0).$$

1. 两条直线平行、重合、垂直

$$(1) \text{ 直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow k_1 = k_2, \text{ 且 } b_1 \neq b_2 \text{ (或 } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}).$$

$$(2) \text{ 直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow k_1 = k_2, \text{ 且 } b_1 = b_2 \text{ (或 } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}).$$

$$(3) \text{ 直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 垂直} \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ (或 } A_1A_2 + B_1B_2 = 0).$$

$$(4) \text{ 直线 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow k_1 \neq k_2 \text{ (或 } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}).$$

2. 两直线的交点坐标

已知两条直线的方程分别为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 解方程组.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

如果方程组有唯一解, 这个解就是两条直线交点的坐标; 无解, 两条直线平行; 无穷多解, 两条直线重合.

3. 点到直线的距离

点到直线的垂线段的长, 叫做点到直线的距离.

设点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为 d , 则

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

4. 两条直线所成的角

两条直线相交构成的不大于直角的角, 叫做两条直线所成的角, 简称两条直线的夹角.

设已知两条直线的方程为 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$, 它们的夹角为 θ ,

$$(1) \text{ 如果 } 1 + k_1k_2 = 0 \quad \text{则 } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) \text{ 如果 } 1 + k_1k_2 \neq 0 \quad \text{则 } \tan\theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right| \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{如果已知直线的方程为 } \begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \tan\theta = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right| \quad (0 <$$

$$\theta < \frac{\pi}{2}).$$

第十四章 圆锥曲线

§ 14.1 曲线和方程、圆

考点 1 曲线和方程

1. 定义

在直角坐标系中,如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y) = 0$ 的实数解建立如下关系:

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解.

(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么,这个方程叫做曲线的方程,这条曲线叫做方程的曲线.

2. 由方程画出曲线

由已知方程画出它的曲线,一般用描点法.

(1) 曲线在两坐标轴上的截距

在方程 $f(x, y) = 0$ 中,令 $y = 0$,求得实数 x 的解,这个解就是曲线在 x 轴上的截距.

在方程 $f(x, y) = 0$ 中,令 $x = 0$,求得实数 y 的解,这个解就是曲线在 y 轴上的截距.

(2) 曲线的对称性

如果用 $-y$ 代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 y ,方程不变,则曲线关于 x 轴对称.

如果用 $-x$ 代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 x ,方程不变,则曲线关于 y 轴对称.

如果用 $-x, -y$ 分别代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 x, y ,方程不变,则曲线关于原点对称.

(3) 曲线的范围

把方程 $f(x, y) = 0$ 变形成为 $y = \varphi(x)$ 和 $x = \psi(y)$ 的形式,找出 x, y 的取值范围.

3. 两曲线的交点

求两曲线的交点通常是求方程组 $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ 的解,方程组有几组实数解,曲线就有几个交点,没有实数解,曲线就不相交.

考点 2 圆

1. 圆的定义

平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹称为圆,定点为圆心,定长为半径.

2. 圆的标准方程

设圆心在点 (a, b) , 半径为 r , 则圆的标准方程是 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

当圆心在原点 $(0, 0)$, 半径为 r 时, 圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$.

3. 圆的一般方程

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$, 经过配方, 此方程配成

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 方程表示的圆心在 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径是 $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ 的圆; 否则, 此方程表示的不是圆.

4. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系: 点 P 到圆心的距离 $d = \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2}$, 当 $d = r$ 时, 点 P 在圆上; 当 $d < r$ 时, 点 P 在圆内; 当 $d > r$ 时, 点 P 在圆外.

5. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系: 设圆心到直线的距离为 $d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 当 $d < r$ 时, 直线和圆相交; 当 $d = r$ 时直线与圆相切; 当 $d > r$ 时, 直线和圆相离.

6. 圆的切线方程

经过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程是 $x_0x + y_0y = r^2$.

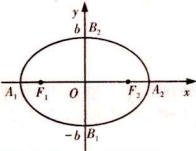
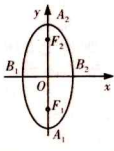
§ 14.2 椭圆

考点 3 椭圆的概念

第一定义:平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数 $2a(2a > |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做椭圆,两定点叫椭圆的焦点,两定点之间的距离叫焦距.

第二定义:平面内与一个定点 F 和一条定直线的距离的比是常数 $e(0 < e < 1)$ 的动点轨迹叫做椭圆,这个常数 e 叫椭圆的离心率,定点 F 叫椭圆的焦点,定直线叫椭圆的准线.

考点 4 椭圆的标准方程和几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$
图 形		
顶 点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$ $B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
对 称 轴	x 轴、 y 轴 长轴长 $2a$, 短轴长 $2b$	
焦 点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦 距	$ F_1F_2 = 2c (c > 0)$ $c^2 = a^2 - b^2$	
离 心 率	$e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$	
准 线	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$

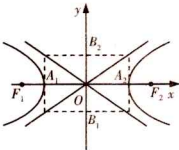
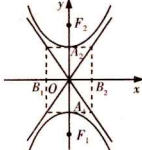
§ 14.3 双曲线

考点 5 双曲线的概念

第一定义:平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离差的绝对值等于常数 $2a(2a < |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫做双曲线,两定点叫双曲线的焦点,两定点间的距离叫双曲线的焦距, $|F_1F_2| = 2c$.

第二定义:平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离的比是常数 $e(e > 1)$ 的动点的轨迹叫做双曲线,常数 e 叫双曲线的离心率,定点 F 叫双曲线的焦点,定直线叫双曲线的准线.

考点 6 双曲线的标准方程和几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图 形		

(续表)

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
顶 点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
对 称 轴	x 轴、 y 轴 实轴长 $2a$, 虚轴长 $2b$	
焦 点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦 距	$ F_1F_2 = 2c (c > 0)$ $c^2 = a^2 + b^2$	
离 心 率	$e = \frac{c}{a} (e > 1)$	
准 线	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
渐 近 线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

§ 14.4 抛物线

考点 7 抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫抛物线, 点 F 叫抛物线的焦点, 定直线 l 叫抛物线的准线.

考点 8 抛物线的标准方程和性质

标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
图 形				
顶 点	$O(0, 0)$			
对 称 轴	x 轴		y 轴	
焦 点	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
离 心 率	$e = 1$			
准 线	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$

§ 14.5 坐标平移

考点 9 坐标平移公式

坐标轴平移公式:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

其中 (x, y) 表示平面内任意一点在旧坐标系中的坐标; (x', y') 表示平面内任意一点在新坐标系中的坐标, (h, k) 表示新坐标原点在旧坐标系中的坐标.

§ 14.6 参数方程

考点 10 几种常见曲线的参数方程

1. 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α 的直线的参数方程是 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 是参数).
- 经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线的参数方程是 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$ (t 是参数).
2. 圆心在原点, 半径为 r 的圆的参数方程是 $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ (φ 是参数).
- 圆心在 (a, b) , 半径为 r 的圆的参数方程是 $\begin{cases} x = a + r \cos \varphi \\ y = b + r \sin \varphi \end{cases}$ (φ 是参数).
3. 中心在原点, 坐标轴为对称轴的椭圆的参数方程有以下两种情形:
 - (1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ 其中 φ 是参数.
 - (2) 椭圆 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = b \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases}$ 其中 φ 是参数.
4. 中心在原点, 坐标轴为对称轴的双曲线的参数方程有以下两种情形:
 - (1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = a \sec \varphi \\ y = b \tan \varphi \end{cases}$ 其中 φ 是参数.
 - (2) 双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = b \cot \varphi \\ y = a \csc \varphi \end{cases}$ 其中 φ 是参数.
5. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ 其中 t 是参数.

第四部分 立体几何

第十五章 直线和平面

§ 15.1 平面的基本性质公理和推论

考点 1 平面的基本性质公理和推论

1. 公理 1
如果一条直线上的两个点在一个平面内, 则这条直线上所有的点都在这个平面内.
2. 公理 2
如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.
3. 公理 3
经过不在同一条直线上的三个点, 有且只有一个平面.
4. 推论 1
经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.
5. 推论 2
经过两条相交直线, 有且只有一个平面.
6. 推论 3
经过两条平行直线, 有且只有一个平面.

§ 15.2 空间直线的位置关系

考点 2 空间两条直线的位置关系

- 共面直线 $\begin{cases} \text{相交, 在同一平面内, 有且只有一个公共点} \\ \text{平行, 在同一平面内, 没有公共点} \\ \text{重合, 在同一平面内, 有两个公共点} \end{cases}$
- 异面直线, 不在同一平面内, 没有公共点.

考点 3 两条直线位置关系的公理、定理、推论

1. 公理 4 (平行传递公理)
在空间中, 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

2. 等角公理

如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行,并且方向相同,那么这两个角相等.

3. 推论

如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

4. 两条异面直线所成的角

经过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线,这两条直线相交所成的锐角(或直角)叫做两条异面直线所成的角.

5. 两条异面直线互相垂直

如果两条异面直线所成的角是直角,那么就称这两条异面直线互相垂直.

§ 15.3 直线和平面位置关系

考点 4 直线与平面的位置关系

1. 直线在平面内

如果直线在平面内,则直线与平面有无数个公共点.

2. 相交

如果直线与平面有且只有一个公共点,则称直线与平面相交.

3. 平行

如果直线与平面没有公共点,则称直线与平面平行

考点 5 直线与平面的位置关系的判定

1. 直线与平面平行

(1) 定义:如果一条直线和一个平面没有公共点,则称这条直线和这个平面平行.

(2) 判定定理:如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

(3) 性质定理:如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线和交线平行.

2. 直线与平面垂直

(1) 定义:如果一条直线和一个平面内的任意一条直线都垂直,则称这条直线和这个平面垂直.

(2) 判定定理:如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

(3) 性质定理:如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

考点 6 斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角

1. 距离

(1) 点到平面的距离:从平面外一点引一个平面的垂线,这点和垂足间的距离叫做这点到这个平面的距离.

(2) 直线到平面的距离:一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到平面的距离叫做这条直线和这个平面的距离.

2. 平面的斜线

一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,这条直线叫做这个平面的斜线.

3. 直线和平面所成的角

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角叫做这条直线和这个平面所成的角.

一条直线垂直于平面,它们所成的角是直角.

如果直线和平面平行或在平面内,它们所成的角度是零.

4. 斜线长与射影长定理

从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中:

(1) 射影相等的两条斜线段相等,射影较长的斜线段也较长.

(2) 相等的斜线段的射影相等,较长的斜线段的射影也较长.

(3) 垂线段比任何一条斜线段都短.

5. 三垂线定理

平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

6. 三垂线定理的逆定理

平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直.

§ 15.4 两个平面的位置关系

考点 7 两个平面的位置关系

1. 两个平面平行

如果两个平面没有公共点,称这两个平面互相平行.

2. 两个平面相交

(1) 斜交:如果两个平面相交,但不相互垂直,称这两个平面斜交.

(2) 垂直:如果两个平面相交所成的二面角是直二面角,称这两个平面互为垂直平面.

3. 二面角

从一条直线引出的两个半平面所成的图形叫二面角.

4. 两个平行平面的公垂线

和两个平行平面垂直的直线称为两个平行平面的公垂线.

5. 两个平行平面之间的距离

夹在两个平行平面之间的公垂线(线段)的长叫做两个平行平面之间的距离.

6. 二面角的平面角

以二面角的棱上任意一点为端点,在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角叫二面角的平面角.

7. 直二面角

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

考点 8 两个平面位置关系的定理和推论

1. 两个平面平行

(1) 判定定理 1:如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

(2) 推论:如果在一个平面内的两条相交直线分别和在另一个平面内的两条直线平行,那么这两个平面平行.

(3) 判定定理 2:垂直于同一条直线的两个平面平行.

2. 两个平面垂直

(1) 性质定理 1:如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行.

(2) 推论:夹在两个平行平面之间的平行线段的长相等.

(3) 性质定理 2:如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,那么它也垂直于另一个平面.

3. 两个平面垂直

(1) 判定定理:如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

(2) 性质定理 1:如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

(3) 性质定理 2:如果两个平面互相垂直,那么经过其中一个平面内的任一点且垂直另一个平面的直线,必在前一个平面内.

(4) 性质定理 3:如果两个相交平面都垂直于第三个平面,那么它们的交线必垂直于第三个平面.

第十六章 空间向量

考点 1 向量的坐标表示法

在空间直角坐标系内, $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则有:

(1) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

(2) 向量的模 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

(3) 线段的定比分点

若 P 点分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的比是 λ , 则 $\overrightarrow{OP} = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} (\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b)$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

考点 2 向量的运算

1. 加法、减法、数乘及其运算律(同平面向量)

(1) 向量的加法

① 三角形法则

已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 在空间上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 作向量 $\overrightarrow{AC}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和(或和向量), 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

② 平行四边形法则

已知空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 在空间上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为邻边作 $\square ABCD$, 则此平行四边形对角线上的向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

③ 向量的加法运算律

交换律

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

结合律

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

(2) 向量的减法

已知空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 在空间中任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则向量 $\overrightarrow{BA}$ 叫做 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的差, 记作 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

 注: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

(3) 数乘向量

实数 λ 与非零向量 $\mathbf{a}$ 的积是一个向量, 记作 $\lambda \mathbf{a}$, 它的长度与方向规定如下:

 ① $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

② 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反; 若 $\mathbf{a}$ 为零向量或 $\lambda = 0$, 规定 $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

③ 实数与向量的积满足如下运算律:

$$(\lambda \mu) \mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a})$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

 其中 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

2. 向量的基本公式

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则有下列公式:

(1) 两向量夹角的计算公式

$$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

(2) 共线条件

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \\ \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \end{cases}.$$

(3) 垂直

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{cases}.$$

第十七章 多面体和旋转体

§ 17.1 多面体

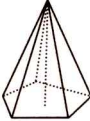
考点 1 棱柱的定义、性质、面积、体积公式

	棱柱	直棱柱	正棱柱
图形			

(续表)

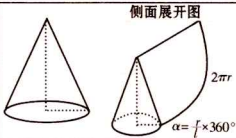
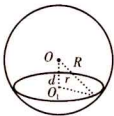
	棱柱	直棱柱	正棱柱
定义	有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的几何体叫做棱柱	侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱	底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱
性质	(1) 侧棱都相等,侧面是平行四边形 (2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形 (3) 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形	(1) 侧面都是矩形 (2) 过不相邻的两条侧棱的截面是矩形 (3) 侧棱和高相等	(1) 侧面都是全等的矩形 (2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的正多边形 (3) 两底面中心的连线垂直于底面
面积	$S_{\text{斜棱柱侧}} = c_1 l$ (c_1 为直截面周长, l 为侧棱长)	$S_{\text{直棱柱侧}} = ch$ (c 为底面周长, h 为高)	
体积	$V_{\text{棱柱}} = Sh$ (S 为底面积, h 为高)		

考点 2 棱锥的定义、性质、面积和体积公式

	棱锥	正棱锥
图形		
定义	有一个面是多边形,其余各面是有一公共顶点的三角形,由这些面所围成的几何体叫做棱锥	棱锥的底面是正多边形,并且顶点在底面上的射影是底面中心,这样的棱锥叫做正棱锥
性质	如果棱锥被平行于底面的平面所截,那么截面和底面相似,并且它们的面积的比等于截得的棱锥的高和已知棱锥的高的平方比	(1) 各侧棱相等,各侧面都是全等的等腰三角形,并且斜高相等 (2) 棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形;棱锥的高、侧棱和侧棱在底面上的射影也组成一个直角三角形
面积		$S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2} ch'$ (c 为底面周长, h' 为斜高)
体积		$V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3} Sh$ (S 为底面积, h 为高)

§ 17.2 旋转体

考点 3 旋转体的定义、性质及表面积、体积公式

	圆锥	圆柱	球
图示			
定义	以直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴,其余各边旋转而成的面围成的几何体叫做圆锥	矩形绕它的一边所在直线旋转生成的几何体叫圆柱	以半圆的直径所在的直线为轴,半圆旋转而成的曲面叫做球面,球面所围成的几何体叫做球

(续表)

	圆 锥	圆 柱	球
性质	(1) 圆锥的轴过底面的圆心,并且垂直于底面 (2) 平行于底面的截面都是圆,截面面积和底面面积的比等于从顶点到截面和从顶点到底面距离的平方比 (3) 过轴的截面是一个等腰三角形,轴截面是等边三角形的圆锥叫做等边圆锥	(1) 平行于底面的截面是和底面相等的圆 (2) 过轴的截面(轴截面)是全等的矩形 (3) 两底面圆圆心的连线(高)垂直于底面 (4) 轴截面是正方形的圆柱(即圆柱的高等于底面半径的2倍),叫做等边圆柱	(1) 球被平面所截得的截面是一个圆,球心和截面圆心的连线垂直于截面 (2) 球心到截面的距离 d ,截面圆的半径 r ,球的半径 R ,有如下关系: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (3) 和球心距离相等的截面截得的圆相等 (4) 和球心距离不相等的截面截得的圆不相等,距离球心近的截面圆较大
面积	$S_{\text{圆锥侧}} = \frac{1}{2}cl = \pi rl$ (c 为底面周长, r 为底面半径, l 为侧面母线长)	$S_{\text{圆柱侧}} = cl = 2\pi rl$ (c 为底面周长, r 为底面半径, l 为侧面母线长)	$S_{\text{球}} = 4\pi R^2$ (R 为半径)
体积	$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r 为底面半径, h 为高)	$V_{\text{圆柱体}} = Sh = \pi r^2 h$ (S 为底面面积, r 为底面半径, h 为高)	$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R 为半径)

第五部分 概率与统计初步

第十八章 排列、组合与二项式定理

§ 18.1 排列、组合

考点 1 分类计数原理和分步计数原理

1. 分类计数原理

做一件事,完成它有 n 类方法,第一类有 m_1 种不同的方法,第二类有 m_2 种不同的方法,……,第 n 类有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

分类计数原理又叫加法原理.

2. 分步计数原理

做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,……,做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

分类计数原理又叫乘法原理.

考点 2 排列、组合

	排 列	组 合
定义	从 n 个不同元素中,任取 m ($m, n \in \mathbf{N}^+$, 且 $m \leq n$) 个,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的一个排列	从 n 个不同元素中,任取 m ($m, n \in \mathbf{N}^+$, 且 $m \leq n$) 个元素组成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合
符号	从 n 个不同元素中取出 m ($m, n \in \mathbf{N}^+$, 且 $m \leq n$) 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 P_n^m 表示(或记为 A_n^m)	从 n 个不同元素中取出 m ($m, n \in \mathbf{N}^+$, 且 $m \leq n$) 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用 C_n^m 表示
公式	(1) 连乘形式 $P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ (2) 阶乘形式 $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, 规定 $0! = 1$ (3) 全排列数公式 $P_n^n = n!$	(1) $C_n^m = \frac{P_n^m}{P_n^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ (2) $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, 规定 $C_n^0 = 1$
性质	(1) $P_n^m = n P_{n-1}^{m-1}$ (2) $P_n^m = (n-m+1) P_n^{m-1}$	(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

§ 18.2 二项式定理

考点 3 二项式定理

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$.
等式右边的式子叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式, $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$ 叫做二项式的系数.

考点 4 通项公式

$(a+b)^n$ 的二项展开式的通项公式是: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (r = 0, 1, 2, 3, \cdots, n)$.

第十九章 概率与统计初步

考点 1 等可能事件的概率

1. 基本事件

一次试验中,可能出现的每一个结果称为一个基本事件.

2. 每一个基本事件的概率

如果一次试验中,由 n 个基本事件组成,且所有基本事件出现的可能性相等,那么每一个基本事件的概率均为 $\frac{1}{n}$.

一般地,如果一次试验中共有 n 种可能出现的结果,其中事件 A 包含的结果有 m 种,那么事件 A 的概率 $P(A)$ 是 $\frac{m}{n}$,即 $P(A) = \frac{m}{n}$.

考点 2 互斥事件有一个发生的概率

1. 不可能同时发生的两个事件,叫做互斥事件.

2. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任何两个都是互斥事件,则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥.

3. 互斥事件的概率加法公式:设事件 A, B 互斥,把 A, B 中有一个发生的事件记作 $A+B$,则有 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥,那么事件 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 发生(即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有一个发生)的概率,等于这 n 个事件分别发生的概率的和,即
 $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

4. 试验时,如果两个互斥事件 A, B 中必有一个发生,那么就称 A, B 为对立事件,一个事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$. 可见, $A + \bar{A}$ 是一个必然事件,即 $P(A + \bar{A}) = 1$,且 $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1$,即两个对立事件的概率的和等于 1,由此可得 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

考点 3 相互独立事件同时发生的概率

1. 事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 发生的概率没有影响,这样的两个事件叫做相互独立事件.

2. 相互独立事件的概率乘法公式:若 A, B 是相互独立事件,它们同时发生的概率记作 $P(A \cdot B)$,那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

一般地,若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,它们同时发生的概率
 $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$.

考点 4 独立重复试验

若在一次试验中某事件发生的概率是 p ,那么在 n 次独立重复试验中,这个事件恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

考点 5 统计初步

1. 样本平均数

样本中所有个体的平均数叫做样本平均数.

2. 样本方差

在一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中,若其平均数为 $\bar{x}$,那么 $\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ 叫做这组数据的样本方差,记作 S^2 .