

成人高考—高起点《理科数学》考前模拟卷

第 I 卷(选择题, 共 85 分)

一、选择题(本大题共 17 小题, 每小题 5 分, 共 85 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)。

1. 已知集合 $A = \{x | -4 \leq x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 3\}$, 那么集合 $A \cap B = ()$

A. $\{x | -4 < x < 3\}$

B. $\{x | -4 \leq x \leq 3\}$

C. $\{x | -1 < x < 2\}$

D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

2. 若 $\sin \alpha > \tan \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha \in ()$

A. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

C. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 则下列函数中必为偶函数的是 $()$

A. $y = |f(x)|$

B. $y = -|f(x)|$

C. $y = xf(x)$

D. $y = f(x) + f(-x)$

4. 设 $0 < a < b < 1$ ，则下列正确的是 ()

A. $a^4 > b^4$

B. $4^{-a} < 4^{-b}$

C. $\log_4 b < \log_4 a$

D. $\log_a 4 > \log_b 4$

5. 函数 $y = 2^x$ 的图像与函数 $x = \log_2 y$ 的图像 ()

A. 关于 x 轴对称

B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $y = x$ 对称

D. 是同一条曲线

6. 下列函数中，() 不是周期函数。

A. $y = \sin(x + \pi)$

B. $y = \sin \frac{1}{x}$

C. $y = 1 + \cos x$

D. $y = \sin 2\pi x$

7. 6 名学生和 1 名教师站成一排照相，教师必须站在中间的站法有 ()

A. P_7^7

B. P_6^6

C. P_5^5

D. $2P_3^3$

8. 设甲： $\Delta > 0$ ，乙： $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根，则 ()

A. 甲是乙的必要条件，但不是充分条件

- B. 甲是乙的充分条件，但不是必要条件
 C. 甲是乙的充分必要条件
 D. 甲不是乙的充分条件，也不是必要条件

9. 已知向量 $a \perp b$ ， $a = (-1, 2)$ ， $b = (x, 2)$ ，则 $x =$ ()

- A. 4
 B. -8
 C. 8
 D. -4

10. 正方形边长为 a ，围成圆柱，体积为 ()

- A. $\frac{a^3}{4\pi}$
 B. πa^3
 C. $\frac{\pi}{2} a^3$
 D. $\frac{a^3}{2\pi}$

11. 复数 $z = \frac{a^2 - 4a + 3}{a - 1} + (a^2 - 3a + 2)i$ ($a \in R$) 为实数，则 $a =$ ()

- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4

12. 以 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个根的平方为根的一元二次方程是 ()

- A. $x^2 - 11x + 1 = 0$
 C. $x^2 + x - 11 = 0$

B. $x^2 - 11x - 1 = 0$

D. $x^2 + x + 1 = 0$

13. 圆 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = -2 + r \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的圆心在 () 点上。

A. $(1, -2)$

B. $(0, 5)$

C. $(5, 5)$

D. $(0, 0)$

14. 过点 $P(2, -3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线方程是 ()

A. $x + y + 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

B. $x - y - 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

C. $x + y - 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

D. $x - y + 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

15. 过点 $P(2, -3)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 相切的直线方程是 ()

A. $y = 5$

B. $x = 5$

C. $y = -5$

D. $x = -5$

16. 参数方程 $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 表示的图形为 ()

A. 直线

- B. 圆
C. 椭圆
D. 双曲线

17. 已知平面 α 、 β 、 γ 两两垂直，它们三条交线的公共点为 O ，过 O 引一条射线 OP ， OP 与三条交线中的两条所成的角都是 60° ，则 OP 与第三条交线所成的角为（ ）
- A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 不确定

第 II 卷（非选择题，共 65 分）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

18. 顶点在原点、焦点在 x 轴上且通径（过焦点和对称轴垂直的弦）长为 6 的抛物线方程为_____。
19. $f(u) = u - 1$ ， $u = \varphi(x) = \lg x$ ，则 $f[\varphi(10)] =$ _____。
20. 圆心在 y 轴上，且与直线 $x + y - 3 = 0$ 及 $x - y - 1 = 0$ 都相切的圆的方程为_____。
21. 若正三棱锥底面边长为 a ，且三条侧棱两两垂直，则它的体积为_____。

三、解答题（本大题共 4 小题，共 49 分）

22. （本小题满分 12 分）

某工厂每月生产 x 台游戏机的收入为 $R(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206$ （百元），成本函数为 $C(x) = 50x + 100$ （百元），当每月生产多少台时，获利润最大？最大利润为多少？

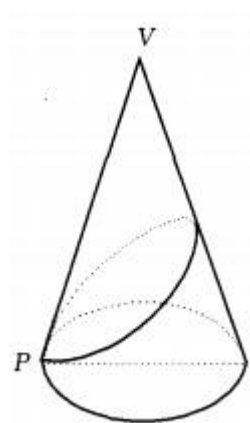
23. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ， M 、 N 为圆与坐标轴的交点，求证：圆的

弦 MN 是椭圆的切线。

24. (本小题满分 12 分)

已知正圆锥的底面半径是 1cm ，母线为 3cm ， P 为底面圆周上一点，由 P 绕过圆锥回到 P 点的最短路径如图所示，由顶点 V 到这条路线的最小距离是多少？



25. (本小题满分 13 分)

从椭圆上 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的右焦点引一条倾斜 45° 的直线，以这条直线与椭圆的两个交点 P 、 Q 及椭圆中心 O 为顶点，组成 $\triangle OPQ$ 。

(I) 求 $\triangle OPQ$ 的周长；

(II) 求 $\triangle OPQ$ 的面积。

成人高考—高起点《理科数学》考前模拟卷参考答案

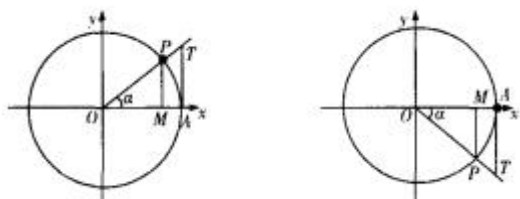
一、选择题

1. 【答案】C

【解析】 $A \cap B = \{x | -4 \leq x < 2\} \cap \{x | -1 < x \leq 3\} = \{x | -1 < x < 2\}$

2. 【答案】B

【解析】首先做出单位圆，然后根据问题的约束条件，利用三角函数线找出满足条件的 α 角取值范围。



$$\because \sin \alpha > \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{又} \because \sin \alpha = MP, \tan \alpha = AT,$$

$$(1) 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \alpha < \tan \alpha$$

$$(2) -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \sin \alpha > \tan \alpha$$

故选 B。

3. 【答案】D

【解析】考查函数的奇偶性，只需将 $f(x)$ 中的 x 换成 $-x$ ，计算出 $f(-x)$ ，然后用奇函数，偶函数定义下结论。

对于 A、B、C 项无法判断其奇偶性，而选项 D 有 $y = f(x) + f(-x)$ 中的 x 换写成 $-x$ 有

$$f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) + f(x) = y$$

4. 【答案】D

【解析】

$$\text{A 错, } \because 0 < a < b < 1, a^4 < b^4$$

$$\text{B 错, } \because 4^{-a} = \frac{1}{4^a}, 4^{-b} = \frac{1}{4^b}, 4^b > 4^a, \therefore 4^{-a} > 4^{-b}$$

$$\text{C 错, } \because \log_4 x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是增函数, } \therefore \log_4 b > \log_4 a$$

D 对, $\because 0 < a < b < 1$, $\log_a$ 为减函数, 对大底小。

5. 【答案】D

【解析】函数 $y = 2^x$ 与函数 $x = \log_2 y$, 是指对函数的两种书写方式, 不是互为反函数, 故是同一条曲线, 但在 $y = 2^x$ 中, x 为自变量, y 为函数, 在 $x = \log_2 y$ 中, y 为自变量, x 为函数。

6. 【答案】B

【解析】A 是周期函数, B 不是周期函数, C 是周期函数, D 是周期函数。

7. 【答案】B

【解析】此题是有条件限制的排列问题, 让教师站在中间, 6 名学生的全排列有 P_6^6 种。

8. 【答案】C

【解析】甲: $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 乙: $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根。

9. 【答案】A

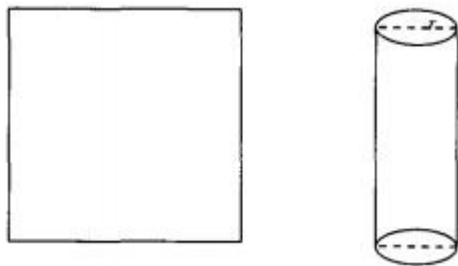
【解析】 $\because a \perp b$

$$\therefore a \cdot b = (-1, 2) \cdot (x, 2) = 0,$$

$$\text{即 } -1 \cdot x + 2 \times 2 = 0, -x + 4 = 0, x = 4$$

10. 【答案】A

【解析】欲求圆柱的体积, 由体积公式可知, 必须知道圆柱的高(即正方形的边长)、半径。半径可由圆柱的周长等于正方形的边长求出, 如图,



$$\because C = 2\pi r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2\pi},$$

$$V_{\text{柱}} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \pi \cdot \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot a = \frac{a^3}{4\pi}$$

11. 【答案】B

【解析】由题意知， $\begin{cases} a \neq 1 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$

12. 【答案】A

【解析】设 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = 3$ ，

$$x_1 x_2 = -1$$

又所求方程的两根为 x_1^2, x_2^2 ，

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 11, \quad x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 1$$

$\therefore$ 所求方程为 $x^2 - 11x + 1 = 0$

13. 【答案】A

【解析】因为 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = -2 + r \sin \theta \end{cases}$ ， $\therefore$ 圆的圆心为 $O(1, -2)$

14. 【答案】A

【解析】若直线在两坐标轴上截距相等，将直线方程转化为截距式容易判别，选项 A 对

选项 B 错，直线 $x - y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$

选项 C 错，直线 $x + y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$

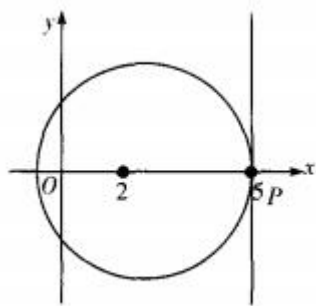
选项 D 错，直线 $x - y + 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$

15. 【答案】B

【解析】将圆的一般方程配方得出圆的标准方程，

$$\because x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9 = 3^2$$

则点 $P(5, 0)$ 在圆上只有一条切线（如图），即 $x = 5$



16. 【答案】B

【解析】 $\because$ 在 $\cos \varphi$ 中 φ 为参数，消去 φ 得， $x^2 + y^2 = 1$ ，即半径为 1 的圆，圆心在原点。

17. 【答案】B

【解析】将 α 、 φ 、 γ 看成是长方体中有公共点的三个面，OP 看成是长方体的对角线，应选 B。

二、填空题

18. 【答案】 $y^2 = \pm 6x$

【解析】设抛物线的方程为 $y^2 = \pm 2\rho x$ ，则焦点 $F(\pm \frac{\rho}{2}, 0)$ ，所以有 $(\frac{6}{2})^2 = \pm 2\rho (\pm \frac{\rho}{2})$ ，得 $\rho = \pm 3$ ，故抛物线方程为 $y^2 = \pm 6x$

19. 【答案】0

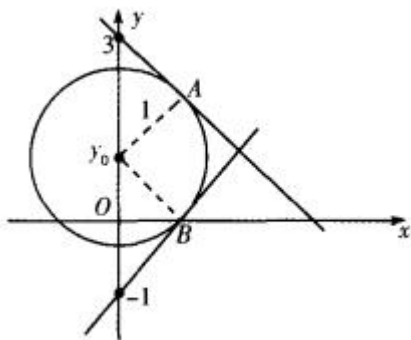
【解析】 $\because \varphi(x) = \lg x$ ，

$\therefore \varphi(10) = \lg 10 = 1$ ，

$\therefore f(\varphi 10) = \varphi(10) - 1 = 1 - 1 = 0$ 。

20. 【答案】 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

【解析】设圆的方程为 $(x-0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ ，(如图)



圆心为 $O'(0, y_0)$ 。

$|O'A| = |O'B|$ ，即

$$\frac{|0 + y_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + y_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

$$|y_0 - 3| = |-y_0 - 1| \Rightarrow y_0 = 1,$$

$$r = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 2$$

21. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$

【解析】 $\because S_{\text{底}} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$

由题意知正三棱锥的侧棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a,$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = h^2,$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$$

三、解答题

22. 【答案】

22. 利润 = 收入 - 成本,

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206 - \\ &\quad (50x + 100) \\ &= -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306. \end{aligned}$$

法一: 用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a < 0$ 时有最大值.

$$\because a = -\frac{4}{9} < 0,$$

$\therefore y = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306$ 是开口向下的抛物线, 有最大值,

$$\text{当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, 即 } x = -\frac{80}{2 \times (-\frac{4}{9})} = 90 \text{ 时,}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

$$\text{可知 } y = \frac{4 \times (-\frac{4}{9}) \times (-306) - 80^2}{4 \times (-\frac{4}{9})} = 3294.$$

法二:用导数来求解.

$$\because L(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306,$$

$$\text{求导 } L'(x) = -\frac{4}{9} \times 2x + 80,$$

$$\text{令 } L'(x) = 0, \text{ 求出驻点 } x = 90.$$

$\because x = 90$ 是函数在定义域内唯一驻点,

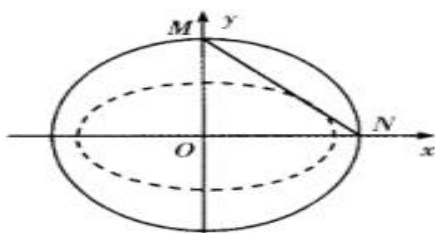
$\therefore x = 90$ 是函数的极大值点,也是函数的

最大值点,其最大值为

$$L(90) = 3294.$$

23. 【答案】

如下图,



23 题答案图

$\because M, N$ 为圆与坐标轴的交点,不妨取 M, N 在

y, x 轴的正方向,

$$\therefore M(0, \sqrt{a^2 + b^2}), N(\sqrt{a^2 + b^2}, 0),$$

由直线的截距式可知,弦 MN 的方程为:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

直线方程与椭圆方程联立得

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{可得 } (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}x + a^4 = 0,$$

$$\text{而 } \Delta = (2a^2 \sqrt{a^2 + b^2})^2 - 4(a^2 + b^2)a^4 = 0,$$

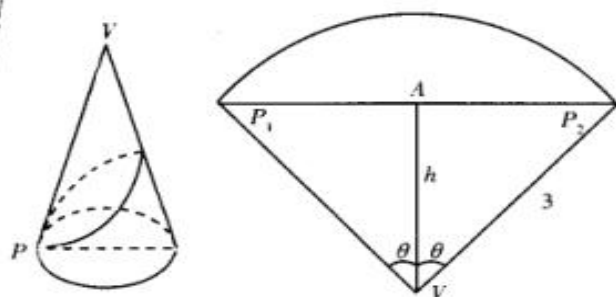
可知二次方程有两个相等实根,因而 MN 是椭

圆的切线.

24. 【答案】

4. 圆锥的曲面沿着母线剪开, 展开成一个平面(如

下图),



24 题答案图

其半径 $VP=3$, 弧长 $=2\pi \cdot 1=2\pi$ 的扇形,

∵ 圆锥的底面半径为 1, 于是围绕圆锥的最短路线对应于扇形内是 P_1 到 P_2 的最短距离, 就是弦 P_1P_2 ,

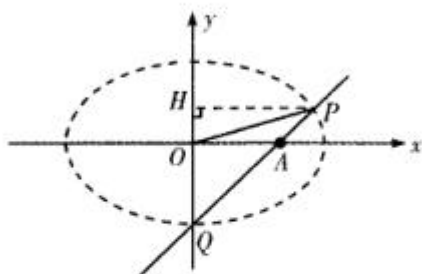
由 V 到这条路线的最短距离是图中的线段 $h=AV$,

依据弧长公式 $2\pi=2\theta \cdot 3$,

得 $\theta=\frac{\pi}{3}$, ∴ $h=3\cos\theta=3 \times \cos \frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$.

25. 【答案】

椭圆方程变形为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ (如图),



25 题答案图

∴ $a^2=2, b^2=1$,

∴ $c^2=a^2-b^2$, ∴ $c=1$,

直线方程为： $y=x-1$ ，

直线方程与椭圆方程联立：

$$\begin{cases} y=x-1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点为 } P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), Q(0, -1),$$

(I) $\triangle OPQ$ 的周长 $= |OQ| + |OP| + |PQ|$

$$= 1 + \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} +$$

$$\sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{1}{3} + 1)^2}$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{17}{9}} + \sqrt{\frac{32}{9}} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(3 + \sqrt{17} + 4\sqrt{2}).$$

(II) 作 $PH \perp y$ 轴，则 $PH = \frac{4}{3}$ ，

$$S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |OQ| \cdot |PH|$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.$$