

第七章 解三角形

本章要求

- (1) 掌握直角三角形的边角关系，会解直角三角形
- (2) 掌握正弦定理，余弦定理，会解斜三角形
- (3) 反三角函数（忽略）

内容提要

一、解直角三角形的有关定理和公式（ $C=90^\circ$ ）

$$1, A + B = 90^\circ$$

$$2, a^2 + b^2 = c^2$$

$$3, \sin A = \cos B = \frac{a}{c}; \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \cos A = \frac{b}{c}; \tan B = \frac{b}{a}$$

$$4, S = \frac{1}{2}ab$$

二、解斜三角形的有关定理和公式

$$1, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$2, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$3, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

例题 1

在 $\triangle ABC$ 中， $A = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，求

(1) $\sin C$

(2) AC

【2016年真题】

【解析】

$$(1) \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{2}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin C = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(2) \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2|AB||AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + x^2 - 12}{4x} \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{44}}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{11}$$

例题 2

在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, $AB = 2, BC = 3$,
 BD 是 AC 边上的高, 求 AC, BD

【2017年真题】

【解析】

(1) 设 AC 为 x

$$\cos 60^\circ = \frac{3^2 + 2^2 - x^2}{12}$$

$$x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

$$(2) \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

例题 3

在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $AC = BC = 1$,
 求:(1) AB ; (2) $\triangle ABC$ 的面积

【2016年真题】

【解析】

$$(1) \frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

例题 4

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $B = 45^\circ$, $C = 105^\circ$
 求:(1) b ; (2) c

【解析】

$$(1) \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10 \Rightarrow b = 5\sqrt{2}$$

$$(2) \frac{c}{\sin 105^\circ} = \frac{5}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60 + 45)$$

$$= \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$c = \frac{5}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

例题 5

在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4$, $A = 30^\circ$, $b = 4\sqrt{3}$

求:(1) B ;(2) c

【解析】

$$(1) \frac{4\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow B = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ$$

$$(2) \text{ 当 } B = 60^\circ; \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{16 + 48} = 8$$

$$\text{当 } B = 120^\circ; \quad c = 4$$

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 8\sqrt{6}$, $B = 45^\circ$, $C = 60^\circ$

求:(1) b ;(2) a

例题 6

【解析】

$$(1) \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{8\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow b = 16$$

$$(2) \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{16}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30 + 45)$$

$$= \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$c = 8\sqrt{3} + 8$$

例题 7

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 1$, $A = 105^\circ$, $C = 30^\circ$

求 c

【解析】

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 105^\circ} &= \frac{c}{\sin 30^\circ} \\ \sin 105^\circ &= \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ c &= \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

例题 8

已知锐角 $\triangle ABC$ 的面积是8, $c = 4$, $b = 5$
求a

【解析】

$$\begin{aligned}8 &= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \\ \Rightarrow \cos A &= \frac{3}{5} = \frac{25 + 16 - c^2}{40} \\ \Rightarrow c^2 &= 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}\end{aligned}$$

例题 9

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 5$, $b = \sqrt{21}$, $a = 4$
求a边上的中线长

【解析】

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{25 + 16 - 21}{40} = \frac{1}{2} \\ \text{设中线长为} x \\ \cos B &= \frac{1}{2} = \frac{25 + 4 - x^2}{20} \\ x^2 &= 19 \Rightarrow x = \sqrt{19}\end{aligned}$$

例题 10

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2$, $b = 3$, $a = 4$
求 $S_{\triangle ABC}$

【解析】

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{4 + 16 - 9}{16} = \frac{11}{16} \\ \Rightarrow \sin B &= \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

