

第九章 圆锥曲线

本章要求

- (1) 掌握圆的标准方程和一般方程以及直线和圆的位置关系。
- (2) 理解椭圆、双曲线、抛物线的概念，掌握它们的标准方程和性质。
- (3) 了解参数方程的概念，了解圆和椭圆的参数方程。（忽略）

内容提要

一、圆的方程

1 标准方程; $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

圆心; (a,b) 半径; r

2 一般方程; $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

二、直线与圆的位置关系

可以通过两个办法判断

- 1 把直线和圆的方程联立解方程组，根据解的情况判断
- 2 根据圆心到直线的距离与半径的关系判断

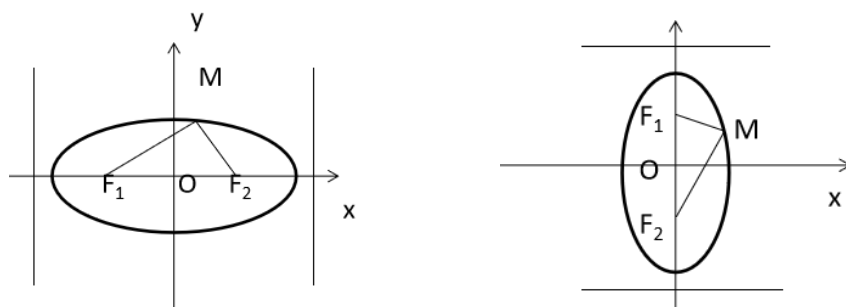
三、椭圆

定义: 平面内到两定点的距离之和等于常数 (该常数 $2a$ 大于两定点的距离 $2c$) 的点的轨迹。

标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

图象



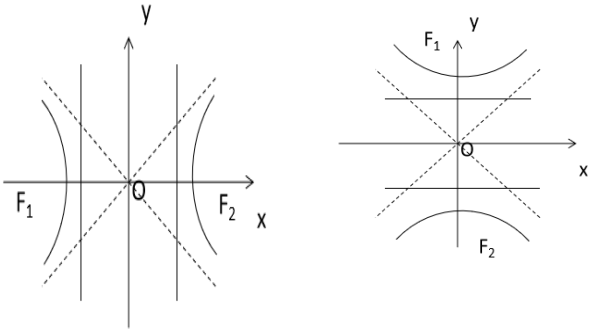
椭圆 标准 方程		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
椭圆 几何 性质	范围	$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a$
	顶点	$(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$	$(0, a), (0, -a), (b, 0), (-b, 0)$
	焦点	$F_1 (-c, 0), F_2 (c, 0)$	$F_1 (0, c), F_2 (0, -c)$
	准线	$X = \pm a^2/c = \pm a/e$	$y = \pm a^2/c = \pm a/e$
	对称轴	关于 x 轴, y 轴及原点对称	
	两轴	长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$	
	焦距	$2c (c > 0), c^2 = a^2 - b^2$	
	离心率	$e = c/a (0 < e < 1)$	

四、双曲线

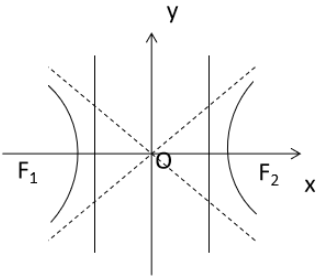
定义：平面内到两定点的距离之差的绝对值等于常数（该常数 2a 小于两定点的距离 2c）的点的轨迹

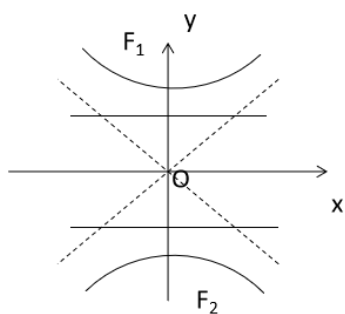
标准方程： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$

图象



标准方程		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$
双曲线几何性质	范围	$x=a$ 和 $x=-a$ 两条平行线的外侧，向左右无限延伸	$y=a$ 和 $y=-a$ 两条平行线的外侧，向左右两侧无限延伸
	顶点	$(a,0), (-a,0)$	$(0,a), (0,-a)$
	焦点	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,c), F_2(0,-c)$
	准线	$x=\pm a^2/c=\pm a/e$	$y=\pm a^2/c=\pm a/e$
	渐进线	$x/a\pm y/b=0$	$x/b\pm y/a=0$
	对称轴	关于 x 轴，y 轴及原点对称	
	两轴	实轴长为 2a，虚轴长为 2b	
	焦距	$2c(c>0), c^2=a^2+b^2$	
	离心率	$e=c/a(0<e<1)$	





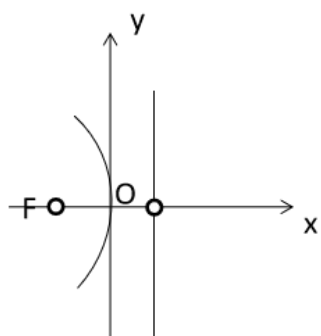
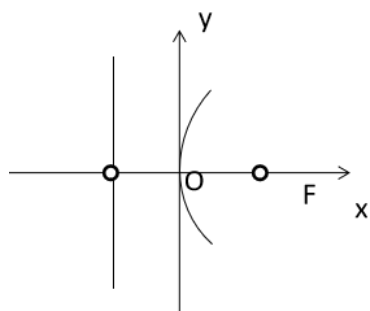
五、抛物线

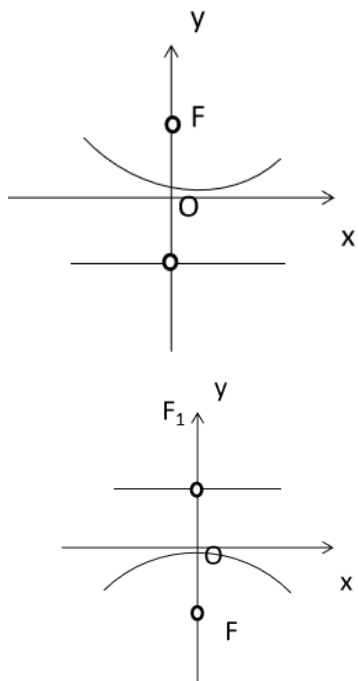
定义：平面内一定点和一条定直线的距离相等

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \quad y^2 = -2px \quad (p > 0)$$

标准方程 $x^2 = 2py \quad (p > 0) \quad x^2 = -2py \quad (p > 0)$

图象





标准方程		$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	$y^2 = -2px$ ($p > 0$)	$x^2 = 2py$ ($p > 0$)	$x^2 = -2py$ ($p > 0$)
抛物线几何性质	范围	$x \geq 0, -\infty < y < +\infty$	$x \leq 0, -\infty < y < +\infty$	$-\infty < x < +\infty, y \geq 0$	$-\infty < x < +\infty, y \leq 0$
	对称轴	X 轴	X 轴	Y 轴	Y 轴
	顶点	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
	焦点	$F(p/2, 0)$	$F(-p/2, 0)$	$F(0, p/2)$	$F(0, -p/2)$
	开口方向	向右	向左	向上	向下
	准线	$x = -p/2$	$x = p/2$	$y = -p/2$	$y = p/2$

例題 1 圓 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ 的半徑是

$A, \sqrt{10}; B, \sqrt{15}; C, 4; D, 16$

【2018 年真題】

【答案】C

【解析】

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 &= 0 \\
 (x+1)^2 + (y-3)^2 - 1 - 9 - 6 &= 0 \\
 (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 16
 \end{aligned}$$

例题2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴为 4, 右焦点是 $(\sqrt{3}, 0)$

(1) 求 C 的标准方程

(2) 直线 l 过 C 的两个顶点, 且与坐标轴不重合, p 为 C 上一点, 求 p 到 l 距离的最大值

【2018 年真题】

【解析】

$$(1) 2a = 4 \Rightarrow a = 2; c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2) 选择 $(-2, 0); (0, 1)$

$l: y = \frac{1}{2}x + 1$ 找到与 l 平行且与 C 相切的

直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 代入到 C 得

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{2}x + t\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + tx + t^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + tx + t^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = t^2 - 2t^2 + 2 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = -\sqrt{2}$$

所以切线是 $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$, 找一点 $(0, -\sqrt{2})$

$$d_{\text{最大}} = \frac{|-\sqrt{2} - 1|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{5}(\sqrt{2} + 1)$$

例题3 双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的焦距是

A 1 B 4 C 2 D $\sqrt{2}$

【2017 年真题】

【答案】B

【解析】

$$a^2 + b^2 = c^2 = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow c = 2 \Rightarrow 2c = 4$$

例題 4 已知三角形的兩個頂點是橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 兩個焦點，第三個頂點在橢圓上，則三角形的周長

A 10 B 20 C 16 D 26 【2017 年真題】

【答案】C

【解析】

$$a^2 - b^2 = c^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow c = 3 \Rightarrow 2c = 6$$

$$2a = 10$$

周長是 16

例題 5 已知關於 x, y 的方程 $x^2 + y^2 + 4x \sin \theta - 4y \cos \theta = 0$

(1) 證明：無論 θ 為何值，方程均表示半徑為定長的圓

(2) 當 $\theta = \pi/4$ 的時候，判斷該圓與直線 $y = x$ 的位置關係

【2017 年真題】

【解析】

(1)

$$x^2 + y^2 + 4x \sin \theta - 4y \cos \theta = 0$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 - 4 \sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta = 0$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 = 4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 = 4$$

所以半徑是 2

(2)

$$x^2 + y^2 + 4x \sin \theta - 4y \cos \theta = 0$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 - 4 \sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta = 0$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 = 4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta$$

$$(x + 2 \sin \theta)^2 + (y - 2 \cos \theta)^2 = 4$$

$$\text{當 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 時: } (x + \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$$

圓心坐標是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$d = \frac{|\sqrt{2} + \sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2 = \text{半徑} \Rightarrow \text{相切}$$

例題 6 已知橢圓 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 斜率為 1 的直線 l 與 C 相交，其中一個交點的坐標是 $(2, \sqrt{2})$ ，且 C 的右焦點到直線 l 的距離為 1

(1) 求 a, b

(2) 求 C 的离心率

【2016 年真题】

【解析】(1) 设直线为; $y=x+t$

$\because$ 点 $(2, \sqrt{2})$ 也在直线上

$$\therefore \sqrt{2} = 2 + t \Rightarrow t = \sqrt{2} - 2$$

$$y = x + \sqrt{2} - 2$$

设椭圆的焦点是 $(c, 0)$

$$1 = \frac{|c + \sqrt{2} - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |c + \sqrt{2} - 2| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow c = 2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4$$

$$\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

(2)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例题 7 抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

的左焦点, 则 $p =$

【2015 年真题】

【解析】

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 &\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \\ &\Rightarrow \text{左焦点是 } (-2, 0) \\ -\frac{p}{2} = -2 &\Rightarrow p = 4 \end{aligned}$$

例题 8 已知椭圆 C; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 直线 l 过 F_1 且斜

率是 $3/4$, 点 $A(x_0, y_0) (y_0 > 0)$ 为 l 和 C 的交点 $AF_2 \perp F_1F_2$

(1) 求 C 的离心率

(2) 若 C 的焦距为 2, 求其方程

【2015 年真题】

【解析】(1)

设直线为: $y = \frac{3}{4}x + t$

$$\text{经过 } (-c, 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}c \Rightarrow A\left(c, \frac{3}{2}c\right) \Rightarrow \begin{cases} AF_1 = 2a - \frac{3}{2}c \\ AF_2 = \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\left(2a - \frac{3}{2}c\right)^2 = 4c^2 + \frac{9}{4}c^2$$

$$2a^2 - 3ac - 2c^2 = 0$$

$$(a - 2c)(2a + c) = 0$$

$$a = 2c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

例题 9 已知椭圆 C 的左右焦点分别是 $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ 长轴是 4

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 若直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m$ 有两个不同的交点, 求 m 的取值范围

【2014 年真题】

【解析】

(1)

$$c = \sqrt{3}; a = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2)

$$x^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + m\right)^2 = 4$$

$$x^2 + 3x^2 + 4\sqrt{3}xm + 4m^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}xm + m^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 3m^2 - 4m^2 + 4 > 0$$

$$m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$$

例题 10 圆 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 的圆心与下列抛物线的顶点重合的是

$$Ay = (x+2)^2 - 3; By = (x+2)^2 + 3$$

$$Cy = (x-2)^2 - 3; Dy = (x-2)^2 + 3$$

【答案】B

【解析】

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

圆心是 $(-2, 3)$

例题 11 过点 $(1, 2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线方程

$$A. x + 2y + 5 = 0; B. 2x + y - 5 = 0$$

$$C. 2x - y = 0; D. x + 2y - 5 = 0$$

【答案】D

【解析】利用排除法和点到直线的距离公式。

例题 12 若椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 过点 $(-2, \sqrt{3})$ 其焦距是

A. $2\sqrt{5}$; B. $2\sqrt{3}$; C. $4\sqrt{5}$; D. $4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

$$\frac{4}{m^2} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow m^2 = 16$$

$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$2c = 4\sqrt{3}$$

例题 13 已知椭圆的长轴长与短轴长的比是 4:3, 离心率是

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$; B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$; C. $\frac{\sqrt{7}}{8}$; D. $\frac{7}{8}$

【答案】A

【解析】

$$\frac{2a}{2b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$$

$$c^2 = \frac{16}{9}b^2 - b^2 = \frac{7}{9}b^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{7}}{3}b$$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}b}{\frac{4}{3}b} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

例题 14 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点是 F_1, F_2 , 通过 F_1 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则

$\triangle ABF_2$ 的周长是

【答案】16

【解析】根据椭圆的定义可得

$$\text{周长} = 2a + 2a = 8 + 8 = 16$$

例题 15 长, 短轴长之和是 20, 焦距是 $4\sqrt{5}$ 的椭圆的标准方程是

【答案】 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$

【解析】

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10$$

$$2c = 4\sqrt{5} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$a^2 = (10 - a)^2 + 20 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ 或 } \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$$

例题 16 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 在 y 轴正半轴上的顶点为 M, 右焦点是 F, 延长线段 MF 与椭圆交于 N

(1) 求直线 MF 的方程

(2) 若该椭圆长轴的两个端点为 A, B 求四边形 AMBN 的面积

【解析】

(1)

$$\begin{cases} a^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{右焦点}(1,0) \\ M(0,1) \end{cases} \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = -(x-1) = -x+1$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + (-x+1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

例题 17 实轴长 10, 焦点分别为 $(0, -\sqrt{29})$, $(0, \sqrt{29})$

的双曲线方程式

$$A. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1; B. \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$C. \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1; D. \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

【答案】 D

【解析】 根据焦点的坐标可以判断实轴正 y 轴上

例题 18 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点是 F_1, F_2 , p 点的坐标是 (0,1) 则 ΔPF_1F_2

的面积是

【答案】 $\sqrt{34}$

【解析】

$$c^2 = a^2 + b^2 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

$$S_{\Delta PF_1F_2} = \frac{2\sqrt{34}}{2} = \sqrt{34}$$

例题 19 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$,

有共同的焦点 则 $a =$

【答案】2

【解析】

$$\text{椭圆: } c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{双曲线: } 9 = a^2 + 5 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = 2$$

例题 20 已知双曲线的渐近线方程是 $y = \pm x$ 两顶点间的距离是 2, 则双曲线的标准方程是

【答案】 $x^2 - y^2 = 1$ 或 $y^2 - x^2 = 1$

【解析】

$$\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ 或 } y^2 - x^2 = 1$$

例题 21 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线方程是 $y = \frac{2}{3}x$, 则其离心率是

【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{3}$

【解析】

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

$$c^2 = \frac{9}{4}b^2 + b^2 = \frac{13}{4}b^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{13}}{2}b$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}b}{\frac{3}{2}b} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

例题 22 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 的准线方程是

$$A. y = 1; B. y = -1; C. x = -\frac{1}{16}; D. x = \frac{1}{16}$$

【答案】A

【解析】

$$y = -\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2 = -4y$$

$$-4 = -2p \Rightarrow p = 2$$

$$y = 1$$

例题 23 已知抛物线的顶点在原点，焦点与圆 $x^2 + y^2 + 6x = 0$

的圆心重合，则抛物线的标准方程

$$A. y^2 = 12x; B. y^2 = -12x;$$

$$C. y^2 = 6x; D. y^2 = -6x$$

【答案】B

【解析】

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 9$$

$$(-3, 0) \Rightarrow -\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = 6$$

$$y^2 = -12x$$

例题 24 直线 $y = x + m$ 交抛物线 $y^2 = 2x$ 于 A, B 两点，若 AB 中点的横坐标是 2，则 $m =$

【答案】-1

【解析】

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x + m \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2m-2)x + m^2 = 0$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-2m}{2} = 1 - m = 2 \Rightarrow m = -1$$