

第五章 三角函数

本章要求

- (1) 理解弧度, 会进行弧度与角度的换算
- (2) 了解三角函数在各个象限的符号和特殊角的值
- (3) 掌握同角三角函数的基本关系式, 诱导公式, 会用它们进行计算, 化简, 证明
- (4) 掌握两角和, 两角差, 二倍角的正弦, 余弦, 正切的公式, 会用它们进行计算, 化简, 证明
- (5) 掌握正弦函数, 余弦函数的图像和性质, 会用性质解决有关问题
- (6) 了解正切函数的图像和性质
- (7) 了解函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \sin x$ 的图像之间的关系
- (8) 会求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期, 最大值, 最小值

内容提要

一、正角, 负角

- 1 正角; 按逆时针旋转所得的角。
- 2 负角; 按顺时针旋转所得的角。

二、角度与弧度

- 1 弧度; $\alpha = l/r$

- 2 换算; $1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}$

三、三角函数

- 1 $y = \sin x = \text{对边}/\text{斜边}$
- 2 $y = \cos x = \text{邻边}/\text{斜边}$
- 3 $y = \tan x = \text{对边}/\text{邻边}$
- 4 $y = \cot x = \text{邻边}/\text{对边} = 1/\tan x$

四、三角函数的符号 (利用定义去理解)

- 1 $y = \sin x$; 一, 二象限为正, 三, 四象限为负
- 2 $y = \cos x$; 一, 四象限为正, 二, 三象限为负
- 3 $y = \tan x$; 一, 三象限为正, 二, 四象限为负
- 4 $y = \cot x$; 同上

五、特殊角的三角函数值 (利用定义去理解)

六、三角函数的公式

- 1 $\tan x = \sin x / \cos x$
- 2 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3 纵变横不变, 符号看象限

七、定义域, 值域, 图像, 性质 (根据图像去理解记忆)

八、周期

- 1 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 和 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$; $T = 2\pi/\omega$
- 2 对于 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$; $T = \pi/\omega$

九、图像的变化

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像是由 $y = \sin x$ 的图像先平移 t 个单位 ($t > 0$; 向左平移, $t < 0$, 向右平移) 然后将横坐标缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $1/\omega$ 倍, 最后将纵坐标伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍。

例题1 函数 $f(x)=\tan(2x+\pi/3)$ 的最小正周期

- A 4π B 2π 【2018年真题】
C π D $\pi/2$

【答案】D

【解析】 $T=\pi/\omega=\pi/2$

例题2 函数 $f(x)=2\cos(3x-\pi/3)$ 在区间 $[-\pi/3, \pi/3]$ 最大值

- A 2 B 1 【2018年真题】
C 0 D

【答案】A

【解析】应为函数 $f(x)=2\cos(3x-\pi/3)$ 的周期是 $2\pi/3$
在区间 $[-\pi/3, \pi/3]$ 上正好是一个周期，所以最大值是 2

例题3 已知 $\sin x = -3/5$, x 是第四象限的角，则 $\sin 2x =$

【2018年真题】

【答案】-24/25

【解析】 $\sin x = -3/5$ 可得 $\cos x = 4/5$
 $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot (4/5) \cdot (-3/5) = -24/25$

例题4 函数 $y=3\sin(x/4)$ 的最小正周期是

- A 8π B 4π C 2π D $2\pi/3$ 【2017年真题】

【答案】A

【解析】 $T=2\pi/(1/4)=8\pi$

例题5 若 $\pi/2 < x < \pi$, $\sin x = 1/3$, 则 $\cos x =$

【2017年真题】

【答案】A

【解析】

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < x < \pi &\Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

例题6 函数 $y=6\sin x \cos x$ 的最大值是

- A 1 B 2 C 6 D 3 【2017年真题】

【答案】D

【解析】 $y=6\sin x \cos x = 3\sin 2x$
所以最大值是 3

例题7 设 $\tan x = 2$, 则 $\tan(x+\pi) =$

A -2 B 2 C 1/2 D -1/2 【2015年真题】

【答案】B

【解析】 $\tan(x+\pi) = \tan x = 2$

例题8 函数 $y=2\sin x \cos x$ 的最小正周期是

A $\pi/2$ B π C 2π D 4π 【2016年真题】

【答案】B

【解析】 $y=2\sin x \cos x = \sin 2x$

$T=2\pi/2=\pi$