

第十三章 复数

本章要求

- (1) 了解复数的概念及复数的代数表示和几何意义
- (2) 会进行复数的代数形式的加减乘除运算

内容提要

一、复数的概念

- 1 实数+虚数=复数
- 2 虚数单位 i . 并规定 $i^2 = -1$
- 3 复数的表示; $z = a + bi$
- 4 复数的模; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- 5 共轭复数; $\bar{z} = a - bi$

一、复数的运算

- 1 加减法; $x = a + bi, y = c + di$
 $x + y = (a + b) + (c + d)i$
- 2 乘法; $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- 3 除法;
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$
$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

例题 1 设 $z = 1 - i$; 则 $5/z - i =$

【2018 年真题】

【答案】 $1 + 2i$

【解析】

$$\begin{aligned}\frac{5}{z - i} &= \frac{5}{1 - 2i} = \frac{5(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \\ &= 1 + 2i\end{aligned}$$

例题 2 求 $\left| \frac{2 - 2i}{(1 + i)^2} \right|$

【2016 年真题】

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

$$\begin{aligned} \left| \frac{2-2i}{(1+i)^2} \right| &= \left| \frac{2-2i}{2i} \right| = \left| \frac{(2-2i)i}{2ii} \right| \\ &= \left| \frac{2+2i}{-2} \right| = |1+i| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

例题3 设 $z = 1 + \sqrt{3}i$ 则 $1/z =$

【2014年真题】

【答案】 $\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$

【解析】

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i}{4} \end{aligned}$$

例题4 求 $(1+i)^9 =$

【答案】 $16(1+i)$

【解析】

$$\begin{aligned} (1+i)^9 &= [(1+i)^2]^4 (1+i) \\ &= (2i)^4 (1+i) = 16(1+i) \end{aligned}$$

例题5 求 $i \bullet i^3 \bullet i^5 \dots i^{99} =$

A 1 B -1 C i D -i

【答案】 A

【解析】

$$\begin{aligned} i \bullet i^3 \bullet i^5 \dots i^{99} &= i^{1+3+5+\dots+99} \\ &= i^{2500} = (-1)^{1250} = 1 \end{aligned}$$

例题6 求 $\frac{1+i}{1-i} =$

A -1 B 1 C i D -i

【答案】 C

【解析】

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

例题7 复数 $z=a+bi$ 是纯虚数的充要条件是

A $a=0$ B $b=0$ C $ab=0$ D $a/b=0$

【答案】D

【解析】要求 $a=0$ 且 $b \neq 0$

例题8 若 $(2x+y)+(3x+1)i=0$, x 和 y 是实数

A $x=-1$ $y=2$ B $x=1$ $y=-2$
C $x=-1/3$ $y=2/3$ D $x=1/3$ $y=-2/3$

【答案】C

【解析】 $3x+1=0$ 且 $2x+y=0$

例题9 若 $x=4+2i$ $y=5-i$ 则

A $x>y$ B $x<y$
C $|x|>|y|$ D $|x|<|y|$

【答案】D

【解析】只能比较模的大小

例题10 若 $(m+i)^2$ 纯虚数, 则 $m=$

A $m=1$ B $m=-1$
C $m=0$ D $m=\pm 1$

【答案】D

【解析】 $(m+i)^2=m^2-1+2mi$
 $m^2-1=0$ 所以 $m=\pm 1$