

数学（理科）知识点汇总

不等式和不等式组

一、不等式的意义和性质

1. 不等式的意义

若 $a, b \in R$, 有:

1) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

2) $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

3) $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$

2. 不等式的性质

1) $a > b \Leftrightarrow b < a$

2) $a > b, b > c \Leftrightarrow a > c$

3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

4) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

5) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

6) $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

7) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

8) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in N_+ \text{ 且 } n > 1)$

9) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in N_+ \text{ 且 } n > 1)$

10) $|a + b| \leq |a| + |b| (a, b \in R, \text{ 且当 } a, b \text{ 同号时取等号})$

二、基本不等式

1. 若 $a \in R$, 则 $a^2 \geq 0$ 。

2. 如果 $a, b \in R$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当 $a = b$ 时取等号)。

函数

一、函数的概念

1. 函数的定义域

1) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $x \neq 0$ 。

2) 函数 $y = \sqrt[n]{x} (n \text{ 为正整数})$ 的定义域为 $x \geq 0$ 。

3) 函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的定义域为 $x > 0$ 。

2.函数的性质

1) 函数的单调性

设 $f(x)$ 是定义在一个区间上的函数, x_1, x_2 是这一区间上的任意两个值, 且 $x_2 > x_1$ 。

①如果总有 $f(x_2) > f(x_1)$, 则称 $f(x)$ 在这个区间上为增函数。

②如果总有 $f(x_2) < f(x_1)$, 则称 $f(x)$ 在这个区间上为减函数。

2) 函数的奇偶性

①如果函数 $f(x)$ 在有定义区间内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在此区间上为奇函数。

②如果函数 $f(x)$ 在有定义区间内的任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在此区间上为偶函数。

二、基本函数类型

1.一次函数

$$y = kx + b \quad (k, b \text{ 是常数且 } k \neq 0)$$

若 $b = 0$, 则 $y = kx$ 叫做正比例函数。

定义域为 R , 图像是过点 $(0, b)$ 与 $(-\frac{b}{k}, 0)$ 的一条直线。

1) 一次函数的性质:

①在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 当 $k > 0$ 时 y 为增函数, 当 $k < 0$ 时 y 为减函数。

②当 $b = 0$ 时, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内 y 为奇函数。

2.二次函数

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ 都是常数且 } a \neq 0)$$

定义域为 R , 图像是顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 的抛物线, 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a}$, $a > 0$

时抛物线开口向上, $a < 0$ 时抛物线开口向下。

1) 二次函数的性质

① $a > 0$, $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 时 y 是减函数, $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 时 y 是增函数。

$a < 0$, $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 时 y 是增函数, $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 时 y 是减函数。

②在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 当 $a > 0$ 时, 在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处 y 取最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 值域为

$y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$; 当 $a < 0$ 时, 在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处 y 取最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 值域为 $y \leq \frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

③当 $b = 0$ 时, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为偶函数。

2) 二次函数的顶点式

$y = a(x-m)^2 + n$ ($a \neq 0$), 其图像的顶点坐标为 (m, n) 。

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)叫做二次函数的一般式。

3.反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ (k 为非零常数)

定义域为 $x \neq 0$

4.指数函数

$y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

定义域为 R , 图像通过点 $(0,1)$ 且在 x 轴的上方。

1) 指数函数的性质

① $y = a^x$ 恒大于零。

②在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 当 $a > 1$ 时 y 为增函数; 当 $0 < a < 1$ 时 y 为减函数。

5.对数函数

$y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

定义域为 $x > 0$, 图像通过点 $(1,0)$ 且在 y 轴的右边。

1) 对数函数的性质

①在区间 $(0, +\infty)$ 内, 当 $a > 1$ 时 y 为增函数; 当 $0 < a < 1$ 时 y 为减函数。

②指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数。

三角函数

一、特殊角的三角函数值

α	30°	45°	60°
角 α 的弧度数	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	0°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	-	0	-	0
$\cot \alpha$	-	0	-	0	-

二、正弦、余弦、正切函数的定义域、值域和性质和周期

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定义域	R	R	$x \in R$ 且 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
周期	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上都是增函数； 在 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上都是减函数（ $k \in Z$ ）	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上都是增函数； 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上都是减函数 （ $k \in Z$ ）	在 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 内 都是增函数（ $k \in Z$ ）

正、余弦型函数 $y = k + A \sin(\omega x + \varphi)$ ， $y = k + A \cos(\omega x + \varphi)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

正切函数 $y = k + A \tan(\omega x + \varphi)$ 的周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$ 。

其中 k, A, ω, φ 都是常数，且 $\omega > 0$ 。

圆锥曲线

一、圆

1.圆的标准方程： $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ， 其中 (a, b) 是圆心的坐标， r 是圆的半径。

2.圆的一般方程： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$ 。

3.直线与圆的位置关系

关于直线 $Ax + By + C = 0$ 和圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系，可由方程组：

(*)
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$
 解的情况

或圆心到直线的距离 $d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 来判别：

直线与圆相交：方程组 (*) 有两组不同的解或 $d < r$ ；

直线与圆相切：方程组 (*) 仅有一组解或 $d = r$ ；

直线与圆相离：方程组 (*) 无解或 $d > r$ 。

二、椭圆

1.椭圆的标准方程和性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$
顶点	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ $B_1(0, -b)$ $B_2(0, b)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$ $B_1(-b, -)$ $B_2(b, 0)$
对称轴	x 轴， y 轴， 长轴长 $2a$ ， 短轴长 $2b$	
对称中心	对称轴的交点是椭圆的中心	
焦点	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
焦距	$ F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$) , $c^2 = a^2 - b^2$	

离心率	$e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$	
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$

三、双曲线

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
对称轴	x 轴, y 轴, 实轴长 $2a$, 虚轴长 $2b$	
对称中心	对称轴的交点是双曲线的中心	
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦距	$ F_1F_2 = 2c (c > 0), c^2 = a^2 + b^2$	
离心率	$e = \frac{c}{a} (e > 1)$	
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
准线	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$

四、抛物线

标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
顶点	O (0,0)			
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$F (\frac{p}{2}, 0)$	$F (-\frac{p}{2}, 0)$	$F (0, \frac{p}{2})$	$F (0, -\frac{p}{2})$
离心率	$e = 1$			
准线	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$

注：抛物线标准方程中的 p 的几何意义是焦点 F 到准线 l 的距离。

导数

一、导函数

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

二、常见函数的导数公式

1) 函数 $y = c$ (c 为常数), 则 $y' = 0$

2) 函数 $y = x^n$ ($n \in Q$), 则 $y' = nx^{n-1}$

3) 函数 $y = e^x$, 则 $y' = e^x$

4) 函数 $y = \sin x$, 则 $y' = \cos x$

5) 函数 $y = \cos x$, 则 $y' = -\sin x$

三、函数的和、差、积、商

设 u 、 v 都是同一个自变量的函数, 则有

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$

多面体和旋转体

一、棱柱、棱锥的体积

1. 棱柱的体积公式

$$V_{\text{棱柱}} = Sh \quad (S \text{为底面积, } h \text{为高})$$

2. 棱锥的体积公式

$$V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3}Sh \quad (S \text{为底面积, } h \text{为高})$$

二、球的面积和体积

1. 球的面积公式

$$S_{\text{球面}} = 4\pi R^2 \quad (R \text{为球半径})$$

2. 球的体积公式

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (R \text{为球半径})$$