

第八章 直线与简易逻辑

本章要求

- (1) 理解向量的概念, 掌握向量的几何表示
- (2) 掌握向量的运算。
- (3) 了解向量的分解, 掌握向量的参数方程
- (4) 掌握向量的数量积, 并能运用解决问题
- (5) 掌握向量的坐标概念, 和坐标运算
- (6) 掌握两点的距离公式, 中点公式, 平移公式
- (7) 会求直线方程
- (8) 理解充分条件, 必要条件, 充要条件
- (9) 掌握两条直线平行和垂直的条件, 点到直线的距离公式, 了解两条直线所成角的公式
- (10) 会求两条曲线的交点

内容提要

一、向量的概念

1 定义; 既有大小又有方向的量

2 表示; $\overrightarrow{AB}$

3 向量的模; $|\overrightarrow{AB}|$

4 平行向量; 方向相同或相反, 也叫共线向量

二、向量的运算

1 加减运算; 三角形法则, 平行四边形法则

2 数乘向量;

三、向量的数量积

1 向量的夹角; $0 \leq \theta \leq 180$

$\theta=0$; 同向。 $\theta=180$; 反向。 $\theta=90$; 垂直

2 数量积

$$a \bullet b = |a||b|\cos \theta$$

$$a \bullet b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

四、向量的坐标表示及其坐标运算

1 定义; $a=(x,y)$

2 利用坐标进行运算;

设向量 $a=(x,y), b=(t,v)$

$$1) a \pm b = (x+t, y+v)$$

$$2) \lambda a = (\lambda x, \lambda y)$$

$$3) a \bullet b = xt + yv$$

$$4) a // b \Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{y}{v}$$

$$5) a \perp b \Rightarrow xt + yv = 0$$

$$6) |a| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$7) \text{设点 } A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

8) 向量 a, b 的夹角 θ ;

$$\cos \theta = \frac{xt + yv}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{t^2 + v^2}}$$

五、直线的参数方程

$$\begin{cases} x = t \cos \theta + x_0 \\ y = t \sin \theta + y_0 \end{cases}$$

(θ 是倾斜角, (x_0, y_0) 是直线上一点)

六、两点间的距离公式

$$\text{设点 } A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

七、线段的中点公式

$$\text{设点 } A(x_1, y_1); B(x_2, y_2),$$

那么线段 AB 的中点 (x, y)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

八、过两点的直线的斜率公式

$$\text{设直线过点 } A(x_1, y_1); B(x_2, y_2),$$

那么直线 AB 的斜率 k

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

九、直线方程

$$\text{设直线过点 } A(x_1, y_1); \text{ 直线的斜率 } k$$

$$\text{点斜式; } y - y_1 = k(x - x_1)$$

十、点到直线的距离公式

$$\text{点 } p(x_1, y_1) \text{ 到直线 } Ax + By + C = 0 \text{ 的距离}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

十一、充要条件

1 充分条件; 有了 A 一定可以得到 B , A 是 B 的充分条件

- 2 必要条件；有了A不一定得到B，但没有A一定得不到B,那么A是B的必要条件
3 充要条件；有了A可得B,有了B可得A，那么A和B互为充要条件。

十二、两条直线平行与垂直的充要条件

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

十三、两条直线的夹角

$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

例题1 已知平面向量 $a=(1,t), b=(-1,2)$ ，若 $a+mb$ 平行于向量 $(-2,1)$ 则 ()

【2018年真题】

A $2t-3m+1=0$

B $2t-3m-1=0$

C $2t+3m+1=0$

D $2t+3m-1=0$

【答案】C

【解析】

$$\begin{aligned} a+mb &= (1,t) + (-m,2m) \\ &= (1-m, t+2m) \end{aligned}$$

因为平行，所以对应成比例

$$\frac{1-m}{-2} = \frac{t+2m}{1} \Rightarrow 3m+2t+1=0$$

例题2 设甲： $y=f(x)$ 的图像有对称轴【2018年真题】

乙： $y=f(x)$ 是偶函数，则 ()

A 甲是乙的充分但不必要条件

B 甲是乙的必要但不充分条件

C 甲是乙的充要条件

D 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】B

【解析】有对称轴不一定是偶函数，但没有对称轴，那么一定不是偶函数。

例题3 若直线 $x+ay-4=0$ 的倾斜角是 30°

则 $a=$ 【2018年真题】

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

$$x + ay - 4 = 0$$

$$ay = -x + 4$$

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{4}{a}$$

$$-\frac{1}{a} = \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = -\sqrt{3}$$

例题 4 已知点 A (4,1) , B (2,3) 则线段 AB 的垂直平分线方程式

【2017 年真题】

A $x - y + 1 = 0$

B $x + y - 5 = 0$

C $x - y - 1 = 0$

D $x - 2y + 1 = 0$

【答案】C

【解析】

直线 AB 的斜率 $k = \frac{3-1}{2-4} = -1$
 那么 AB 的垂直平分线的斜率 $k' = 1$
 直线 AB 的中点坐标是 (3,2)
 $y - 2 = x - 3 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

例题 5 函数 $y = 2x$ 的图像与直线 $x + 3 = 0$ 的交点坐标是

【2017 年真题】

A (-3, -6) B (-3, 8)

C (-3, 6) D (-3, -8)

【答案】A

【解析】联立起来解方程组

例题 6 已知平面向量 $a = (1, 2), b = (-2, 3)$

【2017 年真题】

那么 $2a + 3b =$

【答案】(-4, 13)

【解析】 $2a + 3b = (2, 4) + (-6, 9)$

$= (-4, 13)$

例题 7 直线 l 和 $x - y + 1 = 0$ 关于 $x = -2$ 对称

【2017 年真题】

则直线 l 的斜率是

【答案】-1

【解析】根据图像判断

例题 8 曲线 $y = x^2 + 1$ 与直线 $y = 2x$ 的交点坐标

【2016年真题】

- A (1,2)
- B (-1,2)
- C (2,4)
- D (1, -2)

【答案】A

【解析】

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ (1, 2)$$

例题 9 过点 (0, 1) 且与直线 $x+y+1=0$ 垂直的直线方程

【2016年真题】

【答案】 $y=x+1$

【解析】 $x+y+1=0$

$y=-x-1$ 所以 $k=-1$ 那么所求直线的斜率 $k=1$

$y-1=x$ 可得 $y=x+1$

例题 10 若平面向量 $a=(x,1), b=(1,-2)$ 且 $a \parallel b$ 则 $x=$

【2016 真题】

【答案】 $-1/2$

【解析】 $x/1=1/-2$

$$x=-1/2$$

例题 11 若平面向量 $a=(-2,1), b=(x,-2)$ 且 a 垂直 b 则 $x=$

【2015 年真题】

【答案】 -1

【解析】 $-2x+(-2)=0$

$$x=-1$$

例题 12 设甲: $y=kx+b$ 过点 (1,1) 【2015 年真题】

乙: $k+b=1$, 则 ()

- A 甲是乙的充分但不必要条件
- B 甲是乙的必要但不充分条件
- C 甲是乙的充要条件
- D 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】 $y=kx+b$ 过点 (1,1) 可得 $k+b=1$

$k+b=1$ 也可得 $y=kx+b$ 过点 (1,1)

例题 13 已知点 A (1,1) B(2,1)C(-2,3)则过点 A 及线段 BC 中点的直线方程是

【2015 年真题】

【答案】 $x+y-2=0$

【解析】BC 的中点是 $(0,2)$

所求直线斜率 $k=2-1/0-1=-1$

$y-1=-1(x-1)$ 整理后可得 $x+y-2=0$

例题 14 设甲： $\Delta \geq 0$ 【2014 年真题】

乙：一元二次方程有实数根，则（ ）

- A 甲是乙的充分但不必要条件
- B 甲是乙的必要但不充分条件
- C 甲是乙的充要条件
- D 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】A

【解析】 $\Delta \geq 0$ 一定可得 一元二次方程有实数根，但一元二次方程有实数根不一定得到 $\Delta \geq 0$

例题 15 过点 $(2, 1)$ 且与直线 $y=x$ 垂直的直线方程

【2014 年真题】

【答案】 $y=-x+3$

【解析】 $y=x$

所以 $k=1$ 那么所求直线的斜率 $k=-1$

$y-1=-(x-2)$ 可得 $y=-x+3$

例题 16 二次函数 $y=x^2+x-2$ 与 x 轴的交点坐标是

【2014 年真题】

- A $(-2,0),(1,0)$
- B $(-2,0),(-1,0)$
- C $(2,0),(1,0)$
- D $(2,0),(-1,0)$

【答案】A

【解析】

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x_1=-2; x_2=1$$

例题 17 向量 $a=(1,1), b=(1,-1)$ 则它们的夹角是

【2014 年真题】

- A $\pi/6$
- B $\pi/4$
- C $\pi/3$
- D $\pi/2$

【答案】D

【解析】 $ab = |a||b|\cos\theta$

$ab = 1 - 1 = 0$; 所以 $\theta = \pi/2$

例题 18 已知点 A (1,1) , B(-1,5)且

则点 C 的坐标是

A (0,3)

B (2, -4)

C (1, -2)

D (0,6)

【答案】A

【解析】设点 C 的坐标是 (x,y)

$(x-1, y-1) = (1/2) (-1-1, 5-1)$

$= (-1, 2)$

$x=0, y=3$

例题 19 设甲: $x=1$

乙: $x^2 + 2x - 3 = 0$ 则 ()

A 甲是乙的充分但不必要条件

B 甲是乙的必要但不充分条件

C 甲是乙的充要条件

D 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

【答案】A

【解析】 $x=1$ 一定可以得到 $x^2 + 2x - 3 = 0$

但 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 不一定得到 $x=1$

例题 20 设 $|a|=2, |b|=8, ab=8$, 则 $\langle a, b \rangle$

【答案】60

【解析】 $ab = |a||b|\cos\theta$

$\cos\theta = 1/2$

所以 $\theta = 60$

例题 21 过点 (1,2) 倾斜角的正弦值是 $4/5$ 的直线方程是

A $4x - 3y + 2 = 0$

B $4x + 3y - 6 = 0$

C $y = \pm(4/3)(x+1) - 2$

D $y = \pm(4/3)(x-1) + 2$

【答案】D

【解析】

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \pm \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y - 2 = \pm \frac{4}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{4}{3}(x - 1) + 2$$

例题 22 直线 $y = -x \tan(\pi/5)$ 的倾斜角是

- A $\pi/5$ B $-\pi/5$
C $4\pi/5$ D $6\pi/5$

【答案】C

【解析】 $y = -x \tan(\pi/5)$

$$= x \tan(\pi - \pi/5) = x \tan 4\pi/5$$

例题 23 倾斜角是 $5\pi/6$, y 轴上的截距是 -4 的直线方程

【答案】 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$

【解析】

$$y = \tan \frac{5\pi}{6} x - 4$$

$$= -\tan \frac{\pi}{6} x - 4$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$$

例题 24 倾斜角是 $5\pi/6$, x 轴上的截距是 -4 的直线方程

【答案】 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

$$y = \tan \frac{5\pi}{6} x + b$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-4) + b \Rightarrow b = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

例题 25 设甲: $|x| > 2$ 乙: $x > 2$ 则 ()

- A 甲是乙的充分但不必要条件
B 甲是乙的必要但不充分条件
C 甲是乙的充要条件
D 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】B

【解析】 $|x| > 2$ 不一定得到 $x > 2$, 但如果没有 $|x| > 2$ 那么一定得不到 $x > 2$

例题 26 设甲: $x = 45^\circ$ 乙: $\tan x = 1$ 则 ()

- A 甲是乙的充分但不必要条件
B 甲是乙的必要但不充分条件
C 甲是乙的充要条件
D 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

【答案】A

【解析】 $x = 45^\circ$ 一定得到 $\tan x = 1$, 但 $\tan x = 1$ 不一定得到 $x = 45^\circ$

例题 27 若直线 $x + 3y - 7 = 0$ 与直线 $6x + ay + 5 = 0$ 垂直, $a =$

【答案】-2

【解析】直线 $x + 3y - 7 = 0$ 的斜率是 $-1/3$

直线 $6x + ay + 5 = 0$ 的斜率是 $-6/a$

$$(-1/3) * (-6/a) = -1$$

$$a = -2$$

例题 28 若直线 $x + 3y - 7 = 0$ 与直线 $6x + ay + 5 = 0$ 平行, $a =$

【答案】18

【解析】直线 $x + 3y - 7 = 0$ 的斜率是 $-1/3$

直线 $6x + ay + 5 = 0$ 的斜率是 $-6/a$

$$(-1/3) = (-6/a)$$

$$a = 18$$