

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x \mid |x-2|<1\}$, $N=\{x \mid x>2\}$, 则 $M \cap N=$ ()

A. $\{x \mid 1<x<3\}$

B. $\{x \mid x>2\}$

C. $\{x \mid 2<x<3\}$

D. $\{x \mid 1<x<2\}$

正确答案: C

解析: 解得 $M=\{x \mid |x-2|<1\}=\{x \mid -1<x-2<1\}=\{x \mid <x<3\}$, 故 $M \cap N=\{x \mid 2<x<3\}$ 。

2. 设函数 $f(x)=x^2-1$, 则 $f(x+1)=$ ()

A. x^2+2x+1

B. x^2+2x

C. x^2+1

D. x^2

正确答案: B

解析: $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x$ 。

3. 函数 $y=\lg(x^2-4x+3)$ 的定义域是 ()

A. $\{x \mid -3<x<-1\}$

B. $\{x \mid x<-3 \text{ 或 } x>-1\}$

C. $\{x \mid 1<x<3\}$

D. $\{x \mid x<1 \text{ 或 } x>3\}$

正确答案: D

解析: 由对数函数的性质可知 $x^2-4x+3>0$, 解得 $x>3$ 或 $x<1$, 故函数的定义域为 $\{x \mid x<1 \text{ 或 } x>3\}$ 。

4. 下列函数中, 为奇函数的是 ()

A. $y=\cos 2x$

B. $y=\sin x$

C. $y=2-x$

D. $y=x+1$

正确答案: B

解析: 当 $f(-x)=-f(x)$ 时, 函数 $f(x)$ 是奇函数, 四个选项中只有选项 B 符合, 故选 B 选项。

5. 下列函数中, 为减函数的是 ()

A. $y=\cos x$

B. $y=3^x$

C. $y=\log_{1/2} x$

D. $y=3x^2-1$

正确答案: C

解析: 由对数函数的性质可知, 当底数大于 0 小于 1 时, 在定义域内, 对数函数为减函数, 故选 C 选项。

6. 设 α 是第三象限角, 若 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin\alpha =$ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

正确答案: D

解析:

由于 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, 而 α 为第三象限角, 故 $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 函数 $y = x^2 + 1$ ($x \leq 0$) 的反函数是 ()

A. $y = -\sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$)

B. $y = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$)

C. $y = \sqrt{x} - 1$ ($x \geq 0$)

D. $y = -\sqrt{x} - 1$ ($x \geq 0$)

正确答案: A

解析:

$y = x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$, 由于 $x \leq 0$, 故 $x = -\sqrt{y-1}$, 把 x 与 y 互换, 得所求反函数为

$y = -\sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$).

8. 过点 $(-2, 2)$ 与直线 $x+3y-5=0$ 平行的直线是 ()

A. $x+3y-4=0$

B. $3x+y+4=0$

C. $x+3y+8=0$

D. $3x-y+8=0$

正确答案: A

解析: 所求直线与 $x+3y-5=0$ 平行, 可设所求直线为 $x+3y+c=0$, 将点 $(-2, 2)$ 带入直线方程。

故 $-2+3 \times 2+c=0$, 解得 $c=-4$ 。因此所求直线为 $x+3y-4=0$ 。

9. 已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{24}{25}$

B. $-\frac{7}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

正确答案: D

解析:

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$ 两边平方得 $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{25} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{25}$, 故 $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$.

10.

设甲: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; 乙: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 则 ()

A. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

正确答案: A

解析: 三角形相似不一定全等, 但三角形全等一定相似, 因此, 甲是乙的必要条件但不是充分条件。

11. 已知空间向量 i, j, k 为两两垂直的单位向量, 向量 $a = 2i + 3j + mk$, 若 $|a| = \sqrt{13}$, 则 $m =$ ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

正确答案: C

解析:

由题可知向量 $a = (2, 3, m)$, 故 $|a| = \sqrt{2^2 + 3^2 + m^2} = \sqrt{13 + m^2} = \sqrt{13}$, 解得 $m = 0$.

12. $(2-3i)^2 =$ ()

A. $13-6i$

B. $13-12i$

C. $-5-6i$

D. $-5-12i$

正确答案：D

解析： $(2-3i)^2=4-12i+9i^2=4-9-12i=-5-12i$ 。

13.中心在坐标原点，对称轴为坐标轴，且一个顶点为（3，0），虚轴长为8的双曲线的方程是（）

A. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$

正确答案：B

解析：双曲线有一个顶点为（3，0），因此所求双曲线的实轴在x轴上，可排除A、C选项，

又由于虚轴长为8，故b=4，即b²=16，故双曲线方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。

14. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中，x²的系数为（）

A.20

B.10

C.5

D.1

正确答案：C

解析：二项展开式的第二项为 $C_5^1 x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = 5x^2$ ，故展开式中x²的系数为5。

15.已知直线l：3x-2y-5=0，圆C：（x-1）²+（y+1）²=4，则C上到l的距离为1的点共有（）

A.1个

B.2个

C.3个

D.4个

正确答案：D

解析：由题可知圆的圆心为（1，-1），半径为2，圆心到直线的距离为

$\frac{|3 \times 1 - 2 \times (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 0$ ，即直线过圆心，因此圆C上到直线的距离为1的点共有4

个。

16.袋中有 6 个球，其中 4 个红球，2 个白球，从中随机取出 2 个球，则其中恰有 1 个红球的概率为 ()

A.8/15

B.4/15

C.2/15

D.1/15

正确答案：A

$$\frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{4 \times 2}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{8}{15}.$$

解析：恰有 1 个红球的概率为

17.给出下列两个命题：

①如果一条直线与一个平面垂直，则该直线与该平面内的任意一条直线垂直

②以二面角的棱上任意一点为端点，在二面角的两个面内分别作射线，则这两条射线所成的角为该二面角的平面角

则 ()

A.①②都为真命题

B.①为真命题，②为假命题

C.①为假命题，②为真命题

D.①②都为假命题

正确答案：B

解析：一条直线与平面垂直，则直线与平面内的任意一条直线垂直，故①为真命题；二面角的两条射线必须垂直于二面角的棱，故②为假命题，因此选 B 选项。

二、填空题

1.点 (4, 5) 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标为_____。

答案：(5, 4)

解析：点 (4, 5) 关于直线 $y=x$ 的对称点为 (5, 4)。

2.长方体的长、宽、高分别为 2, 3, 6, 则该长方体的对角线长为_____。

答案：7

解析：

由题可知长方体的底面的对角线长为
 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, 则在由高、底面对角线、长方体的对角线组成的三角形中, 长方体的对角线长为
 $\sqrt{13 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$.

3.某校学生参加一次科技知识竞赛, 抽取了其中 8 位同学的分数作为样本, 数据如下:

90, 90, 75, 70, 80, 75, 85, 75。

则该样本的平均数为_____。

答案：80

解析：样本平均数为 $(90+90+75+70+80+75+85+75)/8=80$ 。

4. 设函数 $f(x) = x \sin x$ ，则 $f'(x) =$ _____。

解析：答案： $\sin x + x \cos x$

$f'(x) = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ 。

三、解答题

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $B=120^\circ$ ， $BC=4$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ ，求 AC 。

解析：

由 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ 得 $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$ 。

所以 $AB = 4$ 。

因此 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 120^\circ = 48$ 。

所以 $AC = 4\sqrt{3}$ 。

2. 已知 a, b, c 成等差数列， $a, b, c+1$ 成等比数列。若 $b=6$ ，求 a 和 c 。

解析：

由已知得
$$\begin{cases} a + c = 12, \\ a(c + 1) = 36. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a = 4, \\ c = 8, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 9, \\ c = 3. \end{cases}$$

3.

已知直线 l 的斜率为 1， l 过抛物线 $C: x^2 = \frac{1}{2}y$ 的焦点，且与 C 交于 A, B 两点。

(I) 求 l 与 C 的准线的交点坐标；

(II) 求 $|AB|$ 。

解析：

(I)

C 的焦点为 $(0, \frac{1}{8})$, 准线为 $y = -\frac{1}{8}$.

由题意得 l 的方程为 $y = x + \frac{1}{8}$.

因此 l 与 C 的准线的交点坐标为 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$.

(II)

$$\text{由} \begin{cases} y = x + \frac{1}{8}, \\ y = 2x^2, \end{cases} \text{得 } 2x^2 - x - \frac{1}{8} = 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, y_1 + y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

因此 $|AB| = y_1 + y_2 + \frac{1}{4} = 1$.

4. 设函数 $f(x) = x \ln x + x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求 $f(x)$ 的极值.

解析:

(I) $f(1) = 1, f'(x) = 2 + \ln x$, 故 $f'(1) = 2$. 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$.

(II) 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x=e-2$ 当 $0 < x < e-2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > e-2$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在区间 $(0, e-2)$ 单调递减, 在区间 $(e-2, +\infty)$ 单调递增. 因此 $f(x)$ 在 $x=e-2$ 时取得极小值 $f(e-2) = -e-2$.