



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 2\}$, 则 $\complement_U A \cup B =$ 【 】

- A. $\{x | x \leq 2\}$ B. $\{x | x < 2\}$
C. $\{x | -1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | -1 < x < 1\}$

2. $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin \alpha, \alpha, \tan \alpha$ 的大小顺序是 【 】

- A. $\tan \alpha > \sin \alpha > \alpha$ B. $\tan \alpha > \alpha > \sin \alpha$
C. $\alpha > \tan \alpha > \sin \alpha$ D. $\sin \alpha > \tan \alpha > \alpha$

3. 已知偶函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($0 < a < b$) 上是增函数, 那么它在区间 $[-b, -a]$ 上是 【 】

- A. 增函数 B. 减函数 C. 不是单调函数 D. 常数

4. 下列成立的式子是 【 】

- A. $0.8^{-0.1} < \log_3 0.8$ B. $0.8^{-0.1} > 0.8^{-0.2}$
C. $\log_3 0.8 < \log_4 0.8$ D. $3^{0.1} < 3^0$

5. 下列函数【 】是非奇非偶函数。

- A. $f(x) = x$ B. $f(x) = x^2 - 2|x| - 1$
C. $f(x) = 2^{|x|}$ D. $f(x) = 2^x$

6. 下列函数的周期是 π 的是 【 】

- A. $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ B. $f(x) = 2\sin 4x$
C. $f(x) = \sin x \cos x$ D. $f(x) = 4\sin x$

7. 5名高中毕业生报考3所院校, 每人只能报一所院校, 则有【 】种不同的报名方法。

- A. P_3^3 B. 5^3 C. 3^5 D. C_3^1

8. 设甲: $a > b$; 乙: $|a| > |b|$, 则 【 】

- A. 甲是乙的充分条件 B. 甲是乙的必要条件
C. 甲是乙的充要条件 D. 甲不是乙的充要条件

9. 把点 $A(-2, 3)$ 平移向量 $a = (1, -2)$, 则对应点 A' 的坐标为 【 】

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, -1)$ C. $(-1, -1)$ D. $(1, 1)$

10. 长方体有一个公共顶点的三个面的面积分别为4, 8, 18, 则此长方体的体积为 【 】

- A. 12 B. 24 C. 36 D. 48

11. 已知复数 $z = a + bi$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $b \neq 0$, 则 【 】

- A. $|z^2| \neq |z|^2 = z^2$ B. $|z^2| = |z|^2 = z^2$
C. $|z^2| = |z|^2 \neq z^2$ D. $|z^2| = z^2 \neq |z|^2$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $\angle C =$ 【 】

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

13. 关于参数 t 的方程 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ 的图形是 【 】

- A. 圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 椭圆

14. 与直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 关于 y 轴对称的直线方程为 【 】

- A. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$
C. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} = 1$ D. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

15. 从点 $M(x, 3)$ 向圆 $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 作切线, 切线长的最小值等于 【 】

- A. 4 B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\sqrt{26}$

16. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中不成立的是 【 】

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$
C. $|a| > |b|$ D. $a^2 > b^2$

17. 已知函数 $f(x) = ax^2 + b$ 的图像经过点 $(1, 2)$, 且其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(3, 0)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式是 【 】

- A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ B. $f(x) = -x^2 + 3$
C. $f(x) = 3x^2 + 2$ D. $f(x) = x^2 + 3$

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 椭圆的中心在原点, 一个顶点和一个焦点分别是直线 $x + 3y - 6 = 0$ 与两坐标轴的交点, 则此椭圆的标准方程为_____.
19. 设 $f(x+1) = x + 2\sqrt{x} + 1$, 则函数 $f(x) =$ _____.
20. 设正三角形的一个顶点在原点, 且关于 x 轴对称, 另外两个顶点在抛物线 $y^2 = 2\sqrt{3}x$ 上, 则此三角形的边长为_____.
21. 从一个正方体中截去四个三棱锥, 得一正三棱锥 $ABCD$, 正三棱锥的体积是正方体体积的_____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

在边长为 a 的正方形中作一矩形, 使矩形的顶点分别在正方形的四条边上, 而它的边与正方形的对角线平行, 问如何作法才能使这个矩形的面积最大?

23. (本小题满分 12 分)

建筑一个容积为 8000m^3 , 深为 6m 的长方体蓄水池, 池壁每 m^2 的造价为 15 元, 池底每 m^2 的造价为 30 元.

- (I) 把总造价 y (元) 表示为长 x (m) 的函数;
- (II) 求函数的定义域.

24. (本小题满分 12 分)

已知正六棱锥的高和底的边长都等于 a .

- (I) 求它的对角面(过不相邻的两条侧棱的截面)的面积、全面积和体积;
- (II) 求它的侧棱和底面所成的角, 侧面和底面所成的角.

25. (本小题满分 13 分)

某县位于沙漠边缘, 到 1999 年底全县绿化率已达 30%. 从 2000 年开始, 每年出现这样的局面: 原有沙漠面积的 16% 被栽上树改为绿洲, 而同时原有绿地面积的 4% 又被侵蚀, 变为沙漠.

- (I) 设全县的面积为 1, 1999 年底绿洲面积为 $a_1 = \frac{3}{10}$, 经过一年绿洲面积为 a_2 , 经过 n 年绿洲

面积为 a_n , 求证: $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{4}{25}$;

- (II) 问至少经过多少年的绿化, 才能使全县的绿洲面积超过 60% (年取整数).

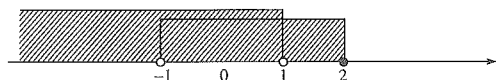
参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 补集运算应明确知道是否包括端点. A 在 U 中的补集是 $x < 1$, 如图



1 题答案图

$\therefore \complement_U A = \{x | x < 1\}$, $\complement_U A \cup B = \{x | x < 1\} \cup \{x | -1 < x \leq 2\} = \{x | x \leq 2\}$.

2. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 角 α 是第一象限角, 如图在单位圆 O 上有, $\sin \alpha = AB$, $\alpha = \widehat{A'B}$, $\tan \alpha = A'B'$, 又 $\therefore AB < \widehat{A'B} < A'B'$, $\therefore \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

3. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数的增减性.

【应试指导】 由偶函数的性质: 偶函数在 $[a, b]$ 和 $[-b, -a]$ 上有相反的单调性, 可知, $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($0 < a < b$) 是增函数, 它在 $[-b, -a]$ 上是减函数. 此题考查函数的性质. $\therefore y = f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-a) = f(a)$, $f(-b) = f(b)$, 又 $\therefore f(a) < f(b)$, $\therefore f(-a) < f(-b)$, 即 $f(-b) > f(-a)$, $\therefore f(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上为减函数.

4. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 A , $0.8^{-0.1}$, $\therefore a = 0.8 < 1$, 为减函数, 又 $\therefore x < 0$, $\therefore 0.8^{-0.1} > 1$. $\log_3 0.8$, $\therefore a > 1$, 为增函数, $0 < x < 1$, $\therefore \log_3 0.8 < 0$. $\therefore 0.8^{-0.1} > \log_3 0.8$, 故 A 错.

B , $0.8^{-0.1}$ (如图), $\therefore a = 0.8 < 1$, 为减函数, 又 $\therefore -0.1 > -0.2$, $\therefore 0.8^{-0.1} < 0.8^{-0.2}$, 故 B 错.

C , $\log_3 0.8$ 与 $\log_4 0.8$ 两个数值比大小, 分别看作 $y_1 = \log_3 x$ 与 $y_2 = \log_4 x$ 底不同, 真数相同, 当 $a > 1$, $0 < x < 1$ 时, 底大, 对大. 故 C 正确.

D , $\therefore a = 3 > 1$, 为增函数, $3^{0.1} > 3^0 = 1$, 故 D 错.

5. 【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 考查函数的奇偶性, 利用奇偶函数的定义就可以讨论.

$\therefore A$, $f(-x) = -x = -f(x)$ 为奇函数.

B , $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 1 = x^2 - 2|x| - 1 = f(x)$ 为偶函数.

C , $f(-x) = 2^{|-x|} = 2^{|x|} = f(x)$ 为偶函数.

D , $f(-x) = 2^{-x} \neq -f(x) \neq f(x)$ 为非奇非偶函数.

6. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期.

【应试指导】 求三角函数的周期时, 一般应将函数转化为

$y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 型, 然后利用正弦、余弦型的周期公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 求解.

A , $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos(2 \times 2x) = \cos 4x$, $T = \frac{\pi}{2}$.

B , $f(x) = 2 \sin 4x$, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

C , $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

D , $f(x) = 4 \sin x$, $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

7. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列与组合.

【应试指导】 将院校看成元素, 高中生看成位置, 由重复排列的元素、位置的条件口诀:

“元素可挑剔, 位置不可缺”, 重复排列的种数共有“元素^{位置}”种, 即将元素的个数作为底数, 位置的个数作为指数. 即: 元素(院校)的个数为 3, 位置(高中生)的个数为 5, 共有 3^5 种.

8. 【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 (1) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$. 如 $0 > -1 \Rightarrow |0| < |-1| \Rightarrow 0 > -1$.

(2) $|a| > |b| \Rightarrow a > b$. 如 $|-3| > |-2| \Rightarrow -3 > -2$. $\therefore$ 左 $\Rightarrow$ 右, 右 $\nRightarrow$ 左, 故甲不是乙的充分必要条件.

注: 判定两个命题是什么条件时, 关键找出条件、结论, 画出“ $\Rightarrow$ ”或“ $\Leftarrow$ ”就能正确地说出是充分、必要、充要条件.

9. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为点的平移变换.

【应试指导】 已知点 $A(x_0, y_0)$, 向量 $a = (a_1, a_2)$, 将点平移向量 a 到点 $A'(x, y)$, 由

平移公式解, 如图, 由 $\begin{cases} x = x_0 + a_1 \\ y = y_0 + a_2 \end{cases}$, $x = -2 + 1 = -1$, $y = 3 - 2 = 1$, $\therefore (x, y)$

为 $(-1, 1)$.

10. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为长方体的体积.

【应试指导】 设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z , 则长方体有一个公共顶点的三个面的面积分别为 xy, yz, xz , 则 $xy \cdot yz \cdot xz = x^2 y^2 z^2 = (xyz)^2$, 又 $\therefore 4 \times 8 \times 18 = 576 = 24^2$, $\therefore V = x \cdot y \cdot z = 24$.

11. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的模及其运算.

【应试指导】 注意区分 $|z^2|$ 与 $|z|^2$.

$\therefore z = a + bi$, 又 $\therefore$ 复数 z 的模为: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$\therefore$ 复数模的平方为: $|z|^2 = a^2 + b^2$,

而 $z^2 = (a + bi)(a + bi) = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$,

$\therefore |z^2|$ 复数的平方的模为: $|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = a^2 + b^2$.

12. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为余弦定理.

【应试指导】 余弦定理是解斜三角形的重要公式, 本题利用余弦定理及三角形面积公式

($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$) 求出角.

$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4S_{\triangle ABC}}{2ab}$ (已知 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$),

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cos C$, ①

又 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$, ②

由①②得: $\cos C = \sin C$, $\therefore \angle C = \frac{\pi}{4}$.

13. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为参数方程.

【应试指导】 由参数方程知为抛物线, 可用消参法消去参数 t . $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ ①, $\frac{x}{y^2} = \frac{1}{2p} \Rightarrow y^2 = 2px$ 为顶点在原点的抛物线.

14. 【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对称直线的性质.

【应试指导】 先将 $3x - 4y = -12$ 转化为截距式

$\frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$,

将 x 换为 $-x$, 得: $\frac{-x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

故选 D.

注: 求直线关于 x 轴对称, 只需将方程中的 y 换为 $-y$.

求直线关于 y 轴对称, 只需将方程中的 x 换为 $-x$.

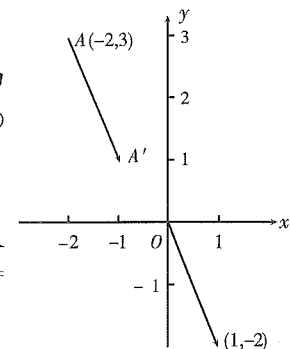
15. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线.

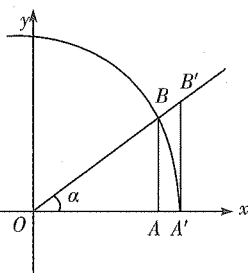
【应试指导】 如图, 相切是直线与圆的位置关系中的一种, 此题利用圆心坐标、半径, 求出切线长.

由圆的方程知, 圆心为 $B(-2, -2)$, 半径为 1, 设切点为 A , $\triangle AMB$ 为 $Rt\triangle$, 由勾股定理得,

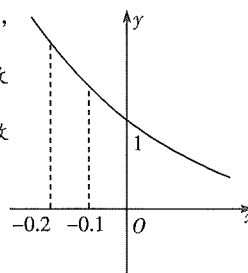
$MA^2 = MB^2 - 1^2 = (x+2)^2 + (3+2)^2 - 1^2 = (x+2)^2 + 24$, $MA = \sqrt{(x+2)^2 + 24}$,



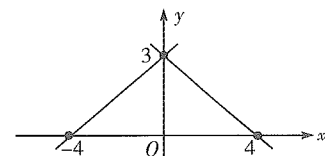
9 题答案图



2 题答案图



4 题答案图



14 题答案图

当 $x+2=0$ 时, MA 取最小值, 最小值为 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

16. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的性质.

【应试指导】 $\because a < b < 0, \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 选项 A 成立.

讨论 B 是否成立时, 可用做差比较法:

$$\because \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a-b)}{(a-b)a} = \frac{b}{a(a-b)}, \because \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ a-b < 0 \end{cases}, \therefore \frac{b}{a(a-b)} < 0, \text{即}$$

$$\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}, \text{故选项 B 不成立.}$$

17. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反函数的性质.

【应试指导】 $f(x)$ 过 $(1, 2)$, 其反函数 $f^{-1}(x)$ 过 $(3, 0)$, 则 $f(x)$ 又过点 $(0, 3)$, 所以有 $f(1)=2, f(0)=3$, 得 $\begin{cases} a+b=2 \\ a \times 0 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}, \therefore f(x) = -x^2 + 3.$

二、填空题

18. 【答案】 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{40} + \frac{x^2}{36} = 1$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的标准方程.

【应试指导】 原直线方程可化为 $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$, 交点 $(6, 0), (0, 2)$.

当点 $(6, 0)$ 是椭圆一个焦点, 点 $(0, 2)$ 是椭圆一个顶点时, $c=6, b=2, a^2=40 \Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$.

当点 $(0, 2)$ 是椭圆一个焦点, $(6, 0)$ 是椭圆一个顶点时, $c=2, b=6, a^2=40 \Rightarrow \frac{y^2}{40} + \frac{x^2}{36} = 1$.

19. 【答案】 $x+2\sqrt{x-1}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的解析式.

【应试指导】 设 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 将它们代入 $f(x+1)=x+2\sqrt{x+1}$ 中, 得 $f(t)=t-1+2\sqrt{t-1}+1=t+2\sqrt{t-1}$, 则 $f(x)=x+2\sqrt{x-1}$.

20. 【答案】 12

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为正三角形的性质.

【应试指导】 设 $A(x_0, y_0)$ 为正三角形的一个顶点, 且在 x 轴上方, $OA=m$,

$$\text{则 } x_0 = m \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}m, y_0 = m \sin 30^\circ = \frac{1}{2}m,$$

可见 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}m, \frac{m}{2})$ 在抛物线 $y^2=2\sqrt{3}x$ 上, 从而 $(\frac{m}{2})^2 = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}m, m=12$.

21. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为正棱锥的体积.

【应试指导】 截去的四个三棱锥的体积相等, 其中任一三棱锥都是底面为直角三角形, 且直角边长与这个三棱锥的高相等, 都等于正方体的棱长. 设正方体的棱长为 a ,

$$\text{则截去的一个三棱锥的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a \cdot a \cdot a = \frac{1}{6}a^3, \text{故 } \frac{a^3 - 4 \times \frac{1}{6}a^3}{a^3} = \frac{1}{3}.$$

三、解答题

22. ABCD 是边长为 a 的正方形, EFGH 是要作的矩形.

设 $HD=x, (0 < x < a)$

则 $AH=a-x$.

由已知 $EH \parallel BD, HG \parallel AC$,

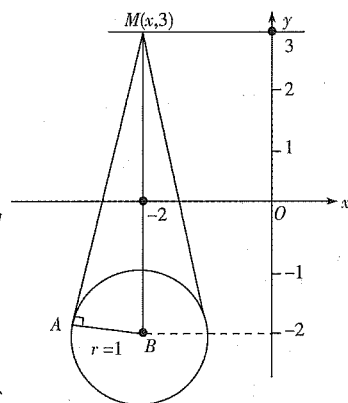
$\therefore \triangle AEH$ 与 $\triangle DHG$ 都是等腰三角形,

于是 $HG=\sqrt{2}x, HE=\sqrt{2}(a-x)$,

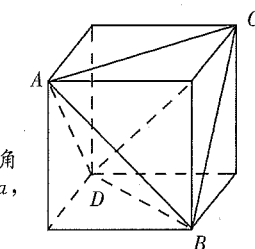
用 y 表示矩形的面积,

$$\text{则 } y = \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}(a-x) = -2x^2 + 2ax = -2(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2},$$

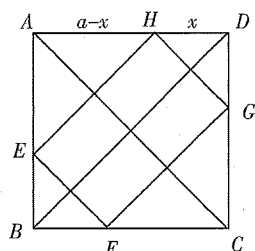
又 $0 < x < a, \therefore$ 当 $x = \frac{a}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{a^2}{2}$.



15 题答案图



21 题答案图



22 题答案图

可知正方形各边中点连得的矩形(即正方形)的面积最大, 其值为 $\frac{a^2}{2}$.

注: 此题也可用导数求出函数 y 的极值: $y' = -4x + 2a$, 令 $y' = 0$, 得驻点 $x = \frac{a}{2}$, 此驻点即为极值点.

23. (I) 设水池长 x m, 则宽为 $\frac{8000}{6x}$, 池壁面积为 $2 \times 6(x + \frac{8000}{6x})$,

$$\text{池壁造价: } 15 \times 12(x + \frac{8000}{6x}),$$

$$\text{池底造价: } \frac{8000 \times 30}{6} = 40000,$$

$$\text{总造价: } y = 15 \times 12(x + \frac{8000}{6x}) + 40000 = 180x + \frac{240000}{x} + 40000 (\text{元}).$$

(II) 定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x > 0\}$.

24. 设正六棱锥为 $S-ABCDEF$, SO 为高, SK 为面 SEF 的斜高, 连接 AC, AD ,

则 $\triangle SAC, \triangle SAD$ 都是对立面, $AD=2a, AC=2AB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}a, SA=SC = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{2}a$.

(I) $S_{\triangle SAD} = a^2$.

$$\triangle SAC \text{ 的高 } h = \frac{\sqrt{5}}{2}a, S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2.$$

$$V_{\text{六棱锥}} = \frac{1}{3} \times \frac{(a+2a) \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} \times 2 \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3,$$

$$SK = \sqrt{SE^2 - EK^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a,$$

$$S_{\text{六棱锥全}} = S_{\text{六棱锥侧}} + S_{\text{六边形}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})a^2.$$

(II) $\because SO \perp$ 底面, $\therefore \angle SAO$ 是棱 SA 与底面所成的角,

$\because SO \perp AO, SO=AO, \therefore \angle SAO=45^\circ$.

$\because SO \perp$ 底面, $SK \perp EF, EF \subset$ 底面,

$\therefore OK \perp EF$,

$\therefore \angle SKO$ 是面 SEF 与底面所成的二面角的平面角,

$$\tan \angle SKO = \frac{SO}{OK} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle SKO = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

25. (I) 过 n 年后绿洲面积为 a_n , 则沙漠面积为 $1-a_n$, 由题意知:

$$a_{n+1} = (1-a_n)16\% + a_n 96\% = \frac{4}{5}a_n + \frac{4}{25}.$$

(II) $a_1 = \frac{3}{10}, a_n = \frac{4}{5}a_{n-1} + \frac{4}{25}, (n \geq 2)$ 则

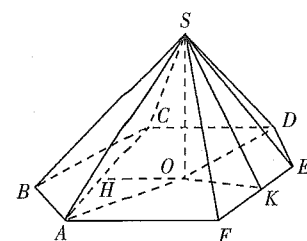
$$\begin{cases} a_n - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(a_{n-1} - \frac{4}{5}) & (n \geq 2) \\ a_1 - \frac{4}{5} = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore \{a_n - \frac{4}{5}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{4}{5}$ 的等比数列,

$$a_n - \frac{4}{5} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \text{即 } a_n = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

要使 $a_n > \frac{3}{5}$, 即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{2}{5}, n \geq 6$,

$\therefore$ 至少需要 6 年, 才能使全县的绿化面积超过 60%.



24 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 若 $U = \{x | x = k, k \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则
A. $S = \complement_U T$ B. $S \cup T \subsetneq U$ C. $S \subseteq T$ D. $S \supseteq T$ 【 】
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\angle B = 45^\circ$, 则 a 等于
A. 2 B. 2 或 $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 无解 【 】
- 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\lg \sin A - \lg \sin B - \lg \cos C = \lg 2$, 则 $\triangle ABC$ 是
A. 以 A 为直角的三角形 B. $b = c$ 的等腰三角形
C. 等边三角形 D. 钝角三角形 【 】
- 设函数 $f(x+2) = 2^{x-2} - 5$, 则 $f(4) =$
A. -5 B. -4 C. 3 D. 1 【 】
- 下列【 】成立.
A. $0.76^{0.12} < 1$ B. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3} > 0$
C. $\log_a(a+1) < \log_{(a+1)} a$ D. $2^{0.32} < 2^{0.31}$ 【 】
- 函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的值域为
A. $y > 0$ B. $y < 0$ C. $0 < y \leq 1$ D. $y > 1$ 【 】
- 在 $(2-x)^8$ 的展开式中, x^5 的系数是
A. 448 B. 1140 C. -1140 D. -448 【 】
- 已知集合 $M = \{1, -2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6, -7\}$, 从这两个集合中各取一个元素作为一个点的直角坐标, 其中在第一、二象限内不同的点的个数是
A. 18 B. 16 C. 14 D. 10 【 】

9. 已知在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB = 5$, $AD = 3$, $AA' = 6$, $\angle BAD = \angle BAA' = \angle DAA' = 60^\circ$, $AC' =$ 【 】A. $\sqrt{133}$ B. 133 C. 70 D. 6310. 在棱长为2的正方体中, M, N 分别为棱 AA' 和 BB' 的中点, 若 θ 为直线 CM 与 $D'N$ 所成的角, 则 $\sin \theta =$ 【 】A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ 11. $i^{25} + i^{15} + i^{40} + i^{80} =$ 【 】
A. 1 B. -1 C. -2 D. 212. 命题甲: $x^2 = y^2$, 命题乙: $x = y$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 甲是乙的 【 】
A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充要条件 D. 即非充分又非必要条件13. 直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 与圆 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的位置关系是 【 】
A. 相交但直线不过圆心 B. 相交但直线通过圆心
C. 相切 D. 相离14. 过点 $(2, -2)$ 且与双曲线 $x^2 - 2y^2 = 2$ 有公共渐近线的双曲线方程是 【 】
A. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$
C. $-\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 15. 根据连续函数的定义, 下列函数在指定点或开区间上不连续的是 【 】
A. $f(x) = 2x + 1$, 点 $x = -1$ B. $f(x) = ax^2 + bx + c$, 点 $x = 0$
C. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, 点 $x = 1$ D. $f(x) = \frac{1}{x-2}$, 开区间 $(0, 2)$ 16. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$ 的单调增区间是 【 】
A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$ C. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2})$ 17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知对于任意自然数 n 有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ 的值为 【 】
A. $(2^n - 1)^2$ B. $\frac{1}{3}(2^n - 1)^2$ C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ D. $4^n - 1$

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

18. 已知直线 $3x + 4y - 5 = 0$, $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

19. 若三角形三边之比为 $2:3:4$, 则此三角形的最小角为 _____ 弧度.

20. $\lg(\tan 43^\circ \tan 45^\circ \tan 47^\circ) =$ _____.

21. 将二次函数 $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 4$ 的图像先向上平移三个单位, 再向左平移五个单位, 所得图像对应的二次函数解析式为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

正四面体 $ABCD$ 内接于半径为 R 的球, 求正四面体的棱长.

23. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{\pi(2n^2 + n)}{12}$.

求证: $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求公差与首项.

24. (本小题满分 12 分)

在锐角二面角 $\alpha-l-\beta$ 中, $P \in \alpha, A, B \in l, \angle APB = 90^\circ, PA = 2\sqrt{3}, PB = 2\sqrt{6}$, PB 与 β 成 30° 角, 求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小.

25. (本小题满分 13 分)

甲、乙二人各射击一次, 若甲击中目标的概率为 0.8, 乙击中目标的概率为 0.6. 试计算:

(I) 二人都击中目标的概率;

(II) 恰有一人击中目标的概率;

(III) 最多有一人击中目标的概率.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算及其相互间的关系。

【应试指导】 注意区分子集、真子集的符号。

$\because U$ 为实数集, S 为偶数集, T 为奇数集, $\therefore T$ (奇数集) 在实数集 U 中的补集是偶数集 S 。

2. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角形的解法。

【应试指导】 此题是已知两边和其中一边的对角, 解三角形时, 会出现一解、两解、无解的情况, 要注意这一点。

用余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, 可得: $(2\sqrt{2})^2 = a^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})cos45^\circ \Rightarrow 8 = a^2 + (8 + 2\sqrt{6} \times$

$\sqrt{2}) - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} a \Rightarrow 0 = a^2 + 2\sqrt{12} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sqrt{2}a \Rightarrow a^2 - (\sqrt{12} + 2)a + 4\sqrt{3} = 0$,

解出 $a = \frac{\sqrt{12} + 2 \pm \sqrt{16 + 4\sqrt{12} - 4 \times 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{12} + 2 \pm \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} - 1) = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$ 。

(提示: $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$)

3. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数与三角形的性质。

【应试指导】 判断三角形的形状, 条件是用一个对数等式给出, 先将对数式利用对数的运算法则整理。

$\therefore \lg \sin A - \lg \sin B - \lg \cos C = \lg 2$, 由对数运算法则可得, 左 $= \lg \frac{\sin A}{\sin B \cos C} = \lg 2$,

两个对数底数相等则真数相等: $\frac{\sin A}{\sin B \cos C} = 2$, 即 $2 \sin B \cos C = \sin A$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\because A + B + C = 180^\circ, \therefore A = 180^\circ - (B + C)$,

又 $\because \sin A = \sin[180^\circ - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$,

$\therefore \frac{\sin A}{\sin B \cos C} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \cos C} = 2$,

$1 + \frac{\cos B \sin C}{\sin B \cos C} = 2 \Rightarrow 1 + \cot B \tan C = 2, \frac{\tan C}{\tan B} = 1 \Rightarrow \tan C = \tan B \Rightarrow c = b$, 故为等腰三角形。

4. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为已知函数的解析式求值。

【应试指导】 方法一是利用凑配法, 就是将函数的解析式写成关于 $(x+2)$ 的函数式;

方法二是常用的换元法, 然后求函数值。

方法一: $\because f(x+2) = 2^{x+2} - 5 = 2^{(x+2)-4} - 5, \therefore f(t) = 2^{t-4} - 5$, 则 $f(4) = 2^{4-4} - 5 = 2^0 - 5 = -4$ 。

方法二: 令 $x+2 = t$, 则 $x = t-2, f(t) = 2^{t-2-2} - 5 = 2^{t-4} - 5, f(4) = 2^{4-4} - 5 = 2^0 - 5 = -4$ 。

5. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质。

【应试指导】 如图, A, $\because 0.76^{0.12}, a = 0.76 < 1$ 为减函数, 又 $\because 0.12 > 0, \therefore 0.76^{0.12} < 1$ 。

B, $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3}, a = \sqrt{2} > 1$ 为增函数, 又 $\because 0 < \frac{1}{3} < 1, \therefore \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3} < 0$ 。

C, $\log_a(a+1)$, 因为 a 没有确定取值范围, 分 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1 < a \end{cases}$ 两种

情况。

D, $\because 2^{0.32}, a > 1$ 为增函数, $2^{0.32} > 2^{0.31}$ 。

6. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的值域。

【应试指导】 利用指数函数的性质, 参照图像 (如图)。

$\because |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$,

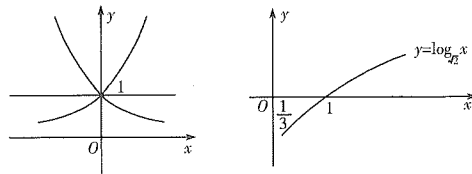
(1) 当 $x > 0$ 时, $(\frac{1}{3})^{|x|} = (\frac{1}{3})^x < 1$ 。

(2) 当 $x < 0$ 时, $(\frac{1}{3})^{|x|} = (\frac{1}{3})^{-x} = 3^x < 1$ 。

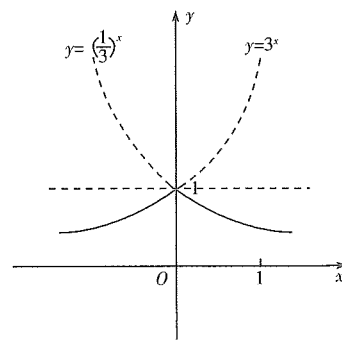
(3) 当 $x = 0$ 时, $(\frac{1}{3})^0 = 1$ 。

$\therefore 0 < y \leq 1$, 注意等号是否成立。

注: 求函数的值域, 要联系自变量取值区间, 方法很多, 常用的有反函数法、配方法、判别式法、基本不等式法等。



5 题答案图



6 题答案图

7. 【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二项展开式。

【应试指导】 直接套用二项式展开公式:

$\because (a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots$

$\therefore (2-x)^8 = C_8^0 2^8 (-x)^0 + \dots + C_8^5 2^3 \cdot (-x)^5 + \dots + C_8^8 2^0 (-x)^8$ 。

x^5 的系数是: $C_8^5 (-1)^5 \times 2^{8-5} = C_8^3 (-1)^5 \times 2^3 = -\frac{8 \times 7 \times 6 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = -448$ 。

注: 展开式中第 $r+1$ 项的二项式系数 C_n^r 与第 $r+1$ 项的系数不同, 此题不能只写出 C_8^5 就为 x^5 的系数。

8. 【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列、组合的相关概念与性质。

【应试指导】 (1) $\because$ 第一象限的点的坐标为 $x > 0, y > 0$, $\therefore$ 只能从 $\{1, -2, 3\}$ 的 1, 3 中取 1 个, 有 C_2^1 种, 从 $\{-4, 5, 6, -7\}$ 的 5, 6 中取 1 个, 有 C_2^1 种, 取出数再全排列, 共有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot P_2^2 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (种)。

(2) 第二象限的点的坐标应满足 $x < 0, y > 0$ 。

从 M 中取 -2 作横坐标 $\Rightarrow$ 有 2 种, 从 N 中取 $-4, -7$ 作横坐标 $\Rightarrow C_2^1 \cdot C_2^1 = 2 \times 2 = 4$ 。

从 N 中取 5, 6 作纵坐标 $\Rightarrow$ 有 2 种, 从 M 中取 1, 3 作纵坐标 $\Rightarrow C_2^1 \cdot C_2^1 = 2 \times 2 = 4$ 。

共有 $8 + 2 + 4 = 14$ 。

注: 注意区分排列、组合的关键, “有顺序”还是“无顺序”的要求。

9. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平行六面体。

【应试指导】 如图,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{AC}|^2$

$= |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}|^2$

$= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA'}|^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'})$

$= 5^2 + 3^2 + 6^2 + 2(5 \times 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times 6 \times \frac{1}{2} + 3 \times 6 \times \frac{1}{2})$

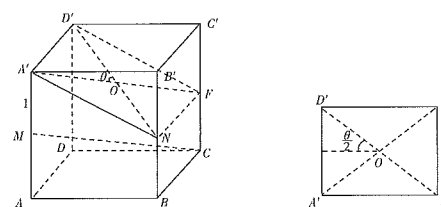
$= 70 + 2 \times (\frac{15}{2} + \frac{30}{2} + \frac{18}{2}) = 70 + 63 = 133$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{133}$ 。

10. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为异面直线所成的角。

【应试指导】 如图,



10 题答案图

取 CC' 的中点为 F , 连结 $A'F$, 则 $MC \parallel A'F$. 异面直线 MC 与 $D'N$ 所成的角与 $A'F$ 与 $D'N$ 所成的角相等。

$\angle A'OD' = \angle \theta, \because A'N^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \therefore A'N = \sqrt{5}, \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + (\frac{2}{\sqrt{5}})^2} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ 。

11. 【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的运算。

【应试指导】 $i^{25} + i^{15} + i^{10} + i^{80} = i + i^3 + 1 + 1 = 2$ 。

12. 【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑。

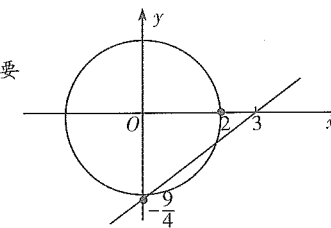
【应试指导】 由 $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y, \Rightarrow x = \pm y$, 由 $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$, 则甲是乙的必要非充分条件。

13. 【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆与直线的位置关系。

【应试指导】 方法一: $\because \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ ①, ②, ①² + ②² 得: $x^2 + y^2 = 4$,

圆心 $O(0,0), r=2$, 则圆心 O 到直线的距离为 $d = \frac{|0-0-9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{5} < 2$,



13 题答案图

$0 < d < 2$, $\therefore$ 直线与圆相交, 而不过圆心.

方法二. 画图可得出结论, 直线与圆相交, 而不过圆心(如图).

14. 【答案】A

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的渐近线.

【应试指导】 将双曲线方程化为标准式方程. 如图

$x^2 - 2y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}, b = 1$, 可知焦点在 x 轴上, 渐近线方

程为: $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 设所求双曲线标准方程为: $\frac{x^2}{a^2} -$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$, 由已知可知渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 设 $a = \sqrt{2}h, b =$

$2h$, 又过点 $(2, -2)$,

将 $(2, -2)$ 代入方程可得: $\frac{(-2)^2}{(\sqrt{2})^2 h^2} - \frac{2^2}{(2h)^2} = 1 \Rightarrow h^2 = 1$, 所以所求双曲线

标准方程为: $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$.

注: 本题是用待定系数法来解的.

15. 【答案】C

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为函数的连续性.

【应试指导】 判断函数在点 x_0 处是否连续, 只需看它的极限值是否等于函数值.

选项 A, $f(x) = 2x + 1$ 是一次函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

选项 B, $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是二次函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

选项 C, $f(x)$ 是分段函数, (如图)

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5 \neq f(1) = 2$.

选项 D, $f(x) = \frac{1}{x-2}$, 在 $x = 2$ 处无意义, 而 $(0, 2)$ 连续

从以上四个选项的讨论中, 只有 C 选项在 $x = 1$ 处不连续.

16. 【答案】A

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为函数的增减性.

【应试指导】 $\because a = \frac{1}{2} < 1$, $\therefore$ 要求 $f(x)$ 增区间必须使 $g(x) = x^2 - x + 1$ 是减区间,

由函数 $g(x)$ 的图像(如图)可知它在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上是减函数, 且 $g(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 是增函数.

17. 【答案】C

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列的性质.

【应试指导】 $\because$ 已知 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n - 1$,

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}$, $\therefore a_n^2 = (2^{n-1})^2$, $\therefore a_1^2 = 1, a_2^2 = 4, a_3^2 =$

$16, a_4^2 = 64$, 即: $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ 是以 $q = 4$ 的等比数列. $\therefore S_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 =$

$\frac{1 - 4^n}{1 - 4} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

二、填空题

18. 【答案】1

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的性质.

【应试指导】 $\because 3x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $x^2 + y^2 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + \frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{25}{16} \Rightarrow a = \frac{25}{16} > 1$,

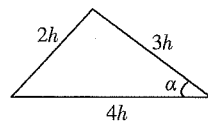
又 $\because$ 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times \frac{25}{16} \times \frac{25}{16} - (\frac{15}{8})^2}{4 \times \frac{25}{16}} = 1$, 是开口向上的抛物线, 顶点坐标 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$, 有

最小值 1.

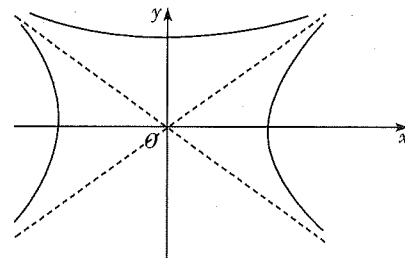
19. 【答案】 $\arccos \frac{7}{8}$

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为余弦定理.

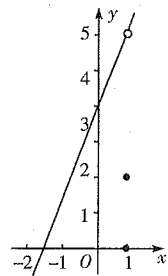
【应试指导】 设三边分别为 $2h, 3h, 4h$ (如图), 由余弦定理知



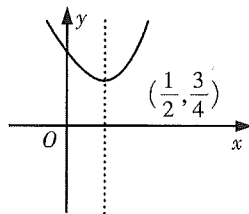
19 题答案图



14 题答案图



15 题答案图



16 题答案图

$$(2h)^2 = (3h)^2 + (4h)^2 - 2 \times 3h \times 4h \cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{7}{8}, \text{ 即 } \alpha = \arccos \frac{7}{8}.$$

20. 【答案】0

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数与三角函数的运算.

【应试指导】 $\lg(\tan 43^\circ \tan 45^\circ \tan 47^\circ) = \lg(\tan 43^\circ \tan 45^\circ \cot 43^\circ) = \lg \tan 45^\circ = \lg 1 = 0$.

21. 【答案】 $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 1$

【考点点拨】 本题主要考查的知识点为二次函数的平移.

【应试指导】 由 $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 4$ 图像向上平移 3 个单位得: $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 4 + 3 = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 1$ 的图像再

向左平移 5 个单位, 得: $y = \frac{1}{3}(x-2+5)^2 - 1 = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 1$ 的图像.

注: (1) $y = f(x)$ 与 $y = f(x \pm a)$ 的图像是左、右平移关系. $f(x+a)$ 是由 $f(x)$ 向左平移 a 个单位. $f(x-a)$ 是由 $f(x)$ 向右平移 a 个单位.

(2) 函数 $f(x) + a$ 的图像与 $f(x)$ 的图像是上、下平移关系, $f(x) + a$ 的图像是由 $f(x)$ 的图像

当 $a > 0$ 时向上平移 a 个单位, 当 $a < 0$ 时向下平移 $|a|$ 个单位.

三、解答题

22. 在正四面体(如图)中作 $AO_1 \perp$ 底面 BCD 于 O_1 .

$\therefore O_1$ 为 $\triangle BCD$ 的中心,

$\therefore OA = OB = OC = OD = R$,

$\therefore$ 球心在底面的 BCD 的射影也是 O_1 , $\therefore A, O, O_1$ 三点共线,

设正四面体的棱长为 x ,

$\therefore AB = x, BO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \therefore AO_1 = \sqrt{AB^2 - BO_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$,

又 $OO_1 = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}x^2}$,

$OO_1 = AO_1 - OA, \therefore \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}x^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x - R \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

23. $\therefore S_n = \frac{\pi(2n^2 + n)}{12}$,

$\therefore a_1 = S_1 = \frac{\pi(2 \times 1^2 + 1)}{12} = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{\pi(2n^2 + n)}{12} - \frac{\pi[2(n-1)^2 + (n-1)]}{12}$

$= \frac{\pi}{12}(4n-1) (n \geq 2)$,

a_1 满足 $a_n = \frac{\pi}{12}(4n-1)$.

$\therefore a_n - a_{n-1} = \frac{\pi}{12}(4n-1) - \frac{\pi}{12}[4(n-1)-1] = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \{a_n\}$ 是以 $\frac{\pi}{4}$ 为首项, 公差为 $\frac{\pi}{3}$ 的等差数列.

24. 如图所示作 $PO \perp \beta$ 于 O , 连接 BO ,

则 $\angle PBO = 30^\circ$,

过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C , 连结 PC ,

$\because PO \perp \beta, OC \perp AB, PO \perp AB, \therefore PC \perp AB$,

$\therefore \angle PCO$ 为二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角,

$\because PB = 2\sqrt{6}, \angle PBO = 30^\circ, \therefore PO = \sqrt{6}$,

又 $\because PB = 2\sqrt{6}, PA = 2\sqrt{3}, \angle APB = 90^\circ$,

$\therefore AB = 6$,

$PC = \frac{PB \cdot PA}{AB} = 2\sqrt{2}, \therefore \sin \angle PCO = \frac{PO}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\angle PCO = 60^\circ$,

故二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 60° .

25. 设甲射击一次击中目标为事件 A , 乙射击一次击中目标为事件 B .

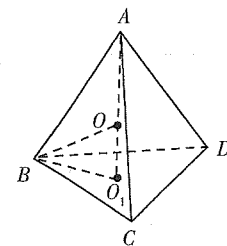
由已知得 $P(A) = 0.8, P(\bar{A}) = 1 - 0.8 = 0.2$,

$P(B) = 0.6, P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$.

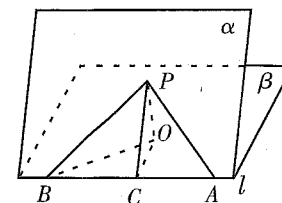
(I) $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$.

(II) $P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6 = 0.44$.

(III) $P(A \cdot B) = 0.48$, 故所求为 $1 - P(A \cdot B) = 1 - 0.48 = 0.52$.



22 题答案图



24 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 3, 4\}$, 则 $A \cap \bar{B}$ 是
A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$ 【 】
2. 方程 $2\sin 2x = x - 3$ 的解
A. 有1个 B. 有2个 C. 有3个 D. 有4个 【 】
3. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(\cos x)$ 的定义域为
A. $[0, 1]$ B. $(-\infty, +\infty)$ C. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}] (k \in \mathbb{Z})$ 【 】
4. 已知 $f(x)$ 是定义域在 $[-5, 5]$ 上的偶函数, 且 $f(3) > f(1)$, 则下列各式一定成立的是
A. $f(-1) < f(3)$ B. $f(0) < f(5)$ C. $f(3) > f(2)$ D. $f(2) > f(0)$ 【 】
5. 下列函数的图像向右平移一个单位长度之后, 与 $y = f(x)$ 的图像重合的是
A. $y = f(x+1)$ B. $y = f(x-1)$ C. $y = f(x)+1$ D. $y = f(x)-1$ 【 】
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2B = A + C$, $b^2 = ac$, 则 $B - A =$
A. 0 B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 【 】
7. 不等式 $2^{x^2+3} > 2^{4x}$ 中 x 的取值范围是
A. $x < 1$ B. $x > 3$ C. $x < 1$ 或 $x > 3$ D. $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$ 【 】
8. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$, 则
A. $a=3, b=5, c=-2$ B. $a=3, b=-2, c=5$ C. $a=-3, b=-5, c=2$ D. $a=2, b=5, c=-3$ 【 】
9. 已知 α, β 为锐角, $\cos \alpha > \sin \beta$, 则
A. $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ C. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$ 【 】

10. 设 a, b 都是单位向量, 下列命题正确的是
A. $a=b$ B. 若 $a \parallel b$, 则 $a=b$ C. $a^2=b^2$ D. $a \cdot b=1$ 【 】
11. 过点 $P(2, 3)$ 且在两轴上截距相等的直线方程为
A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ B. $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ 或 $y = \frac{3}{2}x$ C. $x+y=5$ D. $y-3 = \frac{3}{2}(x-2)$ 【 】
12. 方程 $y = -\sqrt{x}$ 的图形是过原点的抛物线, 且在
A. 第Ⅰ象限内的部分 B. 第Ⅱ象限内的部分 C. 第Ⅲ象限内的部分 D. 第Ⅳ象限内的部分 【 】
13. 甲、乙、丙、丁、戊五个学生排成一排, 甲必须排在乙之前的不同排法为
A. P_4^4 B. $\frac{1}{2}P_4^4$ C. P_5^5 D. $\frac{1}{2}P_5^5$ 【 】
14. 一切被3整除的两位数之和为
A. 4892 B. 1665 C. 5050 D. 1668 【 】
15. 已知 $\alpha \cap \beta = a$, $b \perp \beta$, b 在 α 内的射影是 b' , 那么 b' 和 a 的关系是
A. $b' \parallel a$ B. $b' \perp a$ C. b' 与 a 是异面直线 D. b' 与 a 相交成锐角 【 】
16. 已知 b_1, b_2, b_3, b_4 成等差数列, 且 b_1, b_4 为方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $b_2 + b_3$ 的值为
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$ 【 】
17. 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = f(x) \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ 的奇偶性是
A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数, 又是偶函数 【 】

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

18. 已知 i, j, k 为单位向量且互相垂直, 向量 $a = i + j$, $b = -i + j - k$, 则 $a \cdot b =$ _____.
19. $\frac{1}{3}\sqrt{18}i + \frac{3}{2}\sqrt{8}i - \frac{2}{5}\sqrt{50}i =$ _____.
20. 方程 $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 (A \neq 0)$ 满足条件 $(\frac{D}{2A})^2 + (\frac{E}{2A})^2 - \frac{F}{A} = 0$, 它的图像是 _____.
21. 设离散型随机变量 ξ 的分布列如下表, 那么 ξ 的期望等于 _____.

ξ	6	5.4	5	4	0
P	0.7	0.1	0.1	0.06	0.04

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

已知 a, b, c 成等比数列, x 是 a, b 的等差中项, y 是 b, c 的等差中项, 证明: $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = 2$.

23. (本小题满分 12 分)

A, B, C 是直线 l 上的三点, P 是这条直线外一点, 已知 $AB = BC = a$, $\angle APB = 90^\circ$, $\angle BPC = 45^\circ$. 求:

- (I) $\angle PAB$ 的正弦;
- (II) 线段 PB 的长;
- (III) P 点到直线 l 的距离.

24. (本小题满分 12 分)

在正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DD'} = \mathbf{c}$,

(I) 写出向量 $\overrightarrow{DA'}$ 和 $\overrightarrow{BC'}$ 关于基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 的分解式.

(II) 求证: $\overrightarrow{DA'} \cdot \overrightarrow{BC'} = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2$.

(III) 求证: $\overrightarrow{DD'} \perp \overrightarrow{BC'}$.

25. (本小题满分 13 分)

电流强度 I 随时间 t 变化的函数关系式是 $I = A \sin \omega t$, 设 $\omega = 100\pi$ (弧度/秒), $A = 5$ (安培).

(I) 求电流强度 I 变化周期与频率;

(II) 当 $t = 0, \frac{1}{200}, \frac{1}{100}, \frac{3}{200}, \frac{1}{50}$ (秒) 时, 求电流强度 I (安培);

(III) 画出电流强度 I 随时间 t 变化的函数的图像.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】B

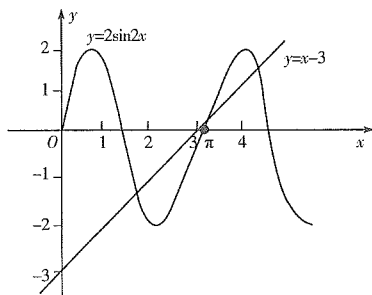
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$.

2.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角方程的解.

【应试指导】 通常三角方程的解法有解析法,还有图像解法.这个方程的解就是函数 $y=2\sin 2x$ 和函数 $y=x-3$ 的值相同的时候,自变量 x 的值,解的个数就是交点的个数(如图).



2 题答案图

注:在同一坐标系中画曲线.

3.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复合函数的定义域.

【应试指导】 求 $f(\cos x)$ 的定义域,就是求自变量 x 的取值范围,由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$,利用已知条件,将 $\cos x$ 看作 x ,得 $0 \leq \cos x \leq 1, 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

注:复合函数求定义域的方法:若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$,其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 解出即得.

4.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 由偶函数定义得: $f(-1) = f(1), \therefore f(3) > f(1) = f(-1)$.

5.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为图像的平移.

【应试指导】 图像向右平移一个单位长度后与 $y=f(x)$ 的图像重合,即求 $y=f(x)$ 向左平移一个单位的函数表达式.

由 $y=f(x)$ 图像向右平移 $|c|$ 个单位,得 $y=f(x+c) (c < 0)$ 图像,向左平移 c 个单位,得 $y=f(x+c)$ 图像,向上平移 c 个单位,得 $y=f(x)+c$ 图像,向下平移 $|c|$ 个单位,得 $y=f(x)+c (c < 0)$ 图像.

反之:由 $y=f(x+c)$ 向右平移 c 个单位得 $y=f(x)$ 的图像.

注:复合函数的图像,可由 $f(x)$ 经过平移得出.

6.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角形的边角关系.

【应试指导】 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi, A+C=\pi-B$, ①

$\therefore 2B=A+C$, ②

由 ①② 得 $2B=\pi-B, \therefore B=\frac{\pi}{3}$.

又 $\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2ac \cdot \cos \frac{\pi}{3}$,

$\therefore b^2=a^2+c^2-ac$, ③

又 $\therefore b^2=ac$, ④

由 ③④ 得 $ac=a^2+c^2-ac, (a-c)^2=0, a=c, \therefore A=C$, 又 $\therefore B=\frac{\pi}{3}, \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,则 $B-A=0$.

7.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数的性质.

【应试指导】 求 x 的取值范围,即求函数的定义域.

$\therefore 2^{x^2+3} > 2^{4x}$, 可设为指数函数, $a=2 > 1$ 为增函数.

由“幂大指大”知 $x^2+3 > 4x$, 可得 $x^2-4x+3 > 0$, 解此不等式得, $x < 1$ 或 $x > 3$.

8.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的反函数.

【应试指导】 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ 的反函数为 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, ①

又 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ 的反函数为 $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$, ② 则 ①=②, $\therefore a=3, b=5, c=-2$.

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的图像及诱导公式.

【应试指导】 方法一:由 $\cos \alpha > \sin \beta$, 诱导公式 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, 得 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) > \sin \beta$.

$\therefore \frac{\pi}{2} - \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \frac{\pi}{2} - \alpha > \beta$, 移项即得 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 又 $\therefore \alpha + \beta > 0, \therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

方法二:可由 $\cos \alpha$ 与 $\sin \beta$ 的图像知, 当 $0 < \beta < \frac{\pi}{4}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos \alpha > \sin \beta$, 则 $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

10.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为单位向量的性质.

【应试指导】 单位向量:长度为 1 的向量(没有定方向).

选项 A, $a=b$ 错误,

$\therefore a, b$ 的长度相等,但方向不一定相同.

选项 B, 若 $a \parallel b$ 则 $a=b$ 错,

$\therefore a, b$ 方向可相反,则 $a \parallel b$.

选项 C, 单位向量的长度是相等的.

选项 D, $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 1 \times 1 \cos \langle a, b \rangle = \cos \langle a, b \rangle$,

$\therefore \langle a, b \rangle$ 的夹角不知, $\therefore$ D 错.

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的截距.

【应试指导】 选项 A 中, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$, 在 x, y 轴上截距为 5. 但答案不完整.

$\therefore$ 选项 B 中有两个方程, $y = \frac{3}{2}x$ 在 x 轴上横截距与 y 轴上的纵截距都为 0, 也是相等的.

选项 C, 虽然过点 (2, 3), 实质上与选项 A 相同.

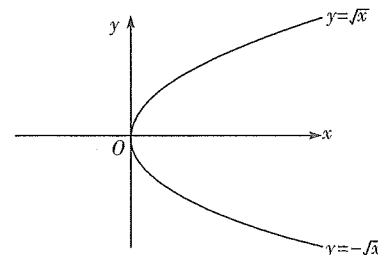
选项 D, 转化为: $y = \frac{3}{2}x$, 答案不完整.

12.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的图像.

【应试指导】 $\therefore$ 顶点在原点的抛物线, 开口方向有四种, 即向上、向下、向左、向右. 向右的可分为两支, 一支是 $y = \sqrt{x}$, 另一支为 $y = -\sqrt{x}$.

由图像(如图)可知为 D.



12 题答案图

13.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 若不考虑甲必须排在乙前面的情况, 共有 P_5^5 种排法. 其中, 丙、丁、戊的排法位置相同, 仅甲、乙排列位置相反的排法各占一半, 故甲排在乙前面的排法为 $\frac{1}{2}P_5^5$, 所以选择 D.

14.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列.

【应试指导】 被 3 整除的两位数有:12,15,18,...,99. 等差数列 $d=3, n=\frac{99}{3}-\frac{9}{3}=33-\frac{9}{3}=30, S=\frac{(12+99)\times 30}{2}=1665$.

15.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三垂线定理的逆定理.

【应试指导】 $\because a\cap\beta=a, b\perp\beta, \therefore b\perp a$, 又 $\because a\subset\alpha, \therefore$ 由三垂线定理的逆定理知, b 在 α 内的射影 $b'\perp a$. 故选 B.

16.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列的性质.

【应试指导】 由根与系数关系得 $b_1+b_4=\frac{3}{2}$, 由等差数列的性质得 $b_2+b_3=b_1+b_4=\frac{3}{2}$, 故应选 D.

17.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x)=-f(x)$,

$\because F(x)=f(x)\cdot(-\cos x)=-f(x)\cos x$,

$\therefore F(-x)=-f(-x)\cos(-x)=f(x)\cos x=-F(x)$,

$\therefore F(x)=f(x)\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}-x)$ 为奇函数.

注:由此可知, 奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数; 奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数; 偶函数 $\times$ 偶函数=偶函数.

二、填空题

18.【答案】 0

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的内积.

【应试指导】 由向量的内积坐标式, 坐标向量的性质得:

$i^2=j^2=k^2=1, i\cdot j=j\cdot k=i\cdot k=0$,

$\therefore a=i+j, b=-i+j-k$, 得:

$a\cdot b=(i+j)(-i+j-k)=-i^2+j^2=-1+1=0$.

19.【答案】 $2\sqrt{2}i$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的运算.

【应试指导】 $\frac{1}{3}\sqrt{18}i+\frac{3}{2}\sqrt{8}i-\frac{2}{5}\sqrt{50}i=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}i+\frac{3}{2}\times 2\sqrt{2}i-\frac{2}{5}\times 5\sqrt{2}i=2\sqrt{2}i$.

20.【答案】 点 $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的性质.

【应试指导】 $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, ①

将①的左边配方, 得

$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2A})^2=(\frac{D}{2A})^2+(\frac{E}{2A})^2-\frac{F}{A}$,

$\therefore (\frac{D}{2A})^2+(\frac{E}{2A})^2-\frac{F}{A}=0$,

方程①只有实数解 $\begin{cases} x=-\frac{D}{2A} \\ y=-\frac{E}{2A} \end{cases}$, 即它的图像是以 $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$ 为圆心, $r=0$ 的圆,

所以表示一个点 $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$, 也称为点圆.

21.【答案】 5.48

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机变量的期望.

【应试指导】 $E(\xi)=6\times 0.7+5.4\times 0.1+5\times 0.1+4\times 0.06+0\times 0.04=5.48$.

三、解答题

22. 由已知条件得, $b^2=ac, 2x=a+b, 2y=b+c$, ①

$\therefore 2cx=ac+bc, 2ay=ab+ac$, ②

②中两式相加得, $2ay+2cx=ab+2ac+bc$,

又①中后两式相乘得,

$4xy=(a+b)(b+c)$

$=ab+b^2+ac+bc=ab+2ac+bc$,

$\therefore 2ay+2cx=4xy$, 即 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$.

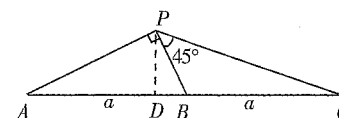
23. PC 是 $\angle APB$ 的外角平分线,

(I) 由外角平分线性质定理,

$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{1}$, 则 $PB=\frac{PA}{2}$, $\sin\angle PAB=\frac{PB}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

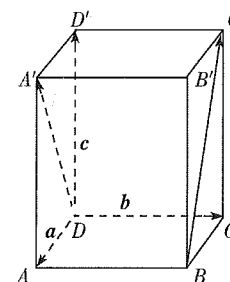
(II) $PB=AB\sin\angle PAB=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

(III) 作 $PD\perp AB$ (如图所示), 其中 $PA=\frac{2}{\sqrt{5}}a$, 故 $PD=PA\sin\angle PAB=\frac{2}{5}a$.



23 题答案图

24. (I) 由题意知 (如图所示)



24 题答案图

$\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DA}=c+a, \overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=-a+c$.

(II) $\overrightarrow{DA'}\cdot\overrightarrow{BC'}=(c+a)(-a+c)=(c+a)\cdot(c-a)=|c|^2-|a|^2$.

(III) $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{BC'}=c\cdot(-a)=-a\cdot c$,

$\because$ 由已知, a, c 是正四棱柱的棱, a, b, c 两两垂直,

$\therefore a\cdot c=0, \therefore \overrightarrow{DD'}\perp\overrightarrow{BC'}$.

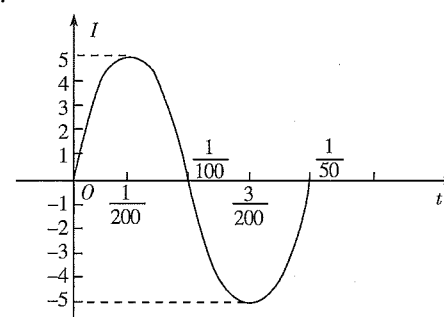
25. (I) $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}(s), f=\frac{1}{T}=50(s^{-1})$.

所以电流强度 I 变化的周期为 $\frac{1}{50}s$, 频率为 50 次/s.

(II) 列表如下:

t (秒)	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{200}$	$\frac{1}{50}$
$I=5\sin 100\pi t$	0	5	0	-5	0

(III) 下图为 I 随 t 变化的图像:



25 题答案图

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

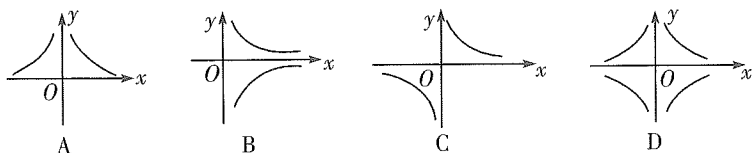
题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

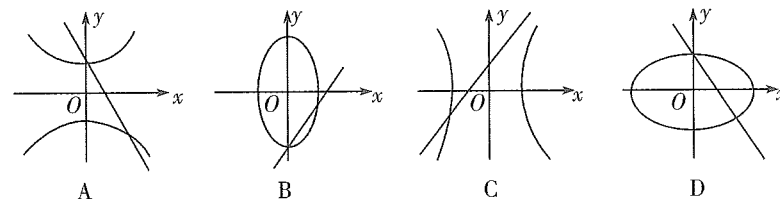
一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U = \{x | 2 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{Z}\}$, $M = \{4 \text{ 的倍数}\}$, $N = \{3 \text{ 的倍数}\}$, $M \cup N =$ 【 】
 A. $\{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$ B. $\{3\}$
 C. $\{x | 2 < x \leq 20\}$ D. $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c}$,则 $\triangle ABC$ 必是 【 】
 A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等边三角形 D. 钝角三角形
3. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$),则 $f(x) =$ 【 】
 A. $\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ B. $\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{x}$ C. $\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}$ D. $\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$
4. 已知 $f(x)$ 是偶函数,且其图像与 x 轴有4个交点,则方程 $f(x) = 0$ 的所有实根之和为 【 】
 A. 4 B. 2 C. 1 D. 0
5. 方程 $|y| = \frac{1}{|x|}$ 的图像是下图中的 【 】



6. 下列等式中,不成立的是 【 】
 A. $\vec{OC} - \vec{CB} = \vec{OB}$ B. $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ C. $0 \cdot \vec{AB} = 0$ D. $\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$
7. 曲线 $y = |x|$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的最小区域的面积是 【 】
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3}{4}\pi$ C. π D. $\frac{3}{2}\pi$

8. 某类灯泡使用时数在1000小时以上的概率为0.2,三个灯泡在使用1000小时以后最多只有一个坏的的概率为 【 】
 A. 0.008 B. 0.104 C. 0.096 D. 1
9. 从椭圆与 x 轴的右交点看短轴两端点的视角为 60° 的椭圆的离心率 【 】
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. a, b 是实数, $a \neq b$, 且 $ab \neq 0$, 方程 $bx^2 + ay^2 = ab$ 及 $y = ax + b$ 所表示的曲线只能是 【 】



11. 设 A, B, C 是三个随机事件,用 A, B, C 的运算关系【 】表示事件: B, C 都发生,而 A 不发生.
 A. $A \cup B \cup C$ B. $\bar{A}BC$ C. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ D. $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$
12. 下列各式正确的是 【 】
 A. $\cos 2 < \sin 1 < \tan \pi$ B. $\cos 2n\pi < \cot \pi^\circ < \sin 1$
 C. $\cos 1 < \cos 2 < \sin 1$ D. $\cos 2 < \cos 1 < \cot \pi^\circ$
13. 圆柱的轴截面面积等于10,体积为 5π ,它的母线长和侧面积分别是 【 】
 A. 5和 10π B. 5π 和10 C. 5和 25π D. 10和 10π
14. $(x - a^{-2})^6$ 展开式中,末3项的系数(a, x 均未知)之和为 【 】
 A. 22 B. 12 C. 10 D. -10
15. 函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ 的最大值是 【 】
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
16. 已知向量 $a = (3, 4)$, 向量 $b = (0, -2)$, 则 $\cos \langle a, b \rangle$ 的值为 【 】
 A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{25}$ D. $-\frac{2}{25}$
17. 已知 x 轴上的一点 B 与点 $A(5, 12)$ 的距离等于13,则点 B 的坐标为 【 】
 A. $(10, 0)$ B. $(0, 0)$ C. $(10, 0)$ 或 $(0, 0)$ D. $(-10, 0)$

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

18. 函数 $y = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}}{2x+3}$ 的定义域是_____.
19. 已知 $5\pi < \alpha < \frac{11}{2}\pi$, 且 $|\cos \alpha| = m$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的值等于_____.

20. 已知 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 - xy + y^2$ 的值域为_____.

21. 已知 $A(2, 1), B(3, -9)$, 直线 $l: 5x + y - 7 = 0$ 与直线 AB 交于 P 点, 点 P 分 AB 所成的比为_____.

得分	评卷人

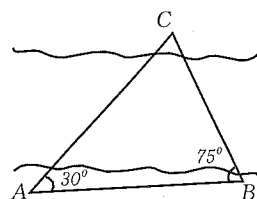
三、解答题(本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

- (I) 求曲线 $y = \ln x$ 在 $(1, 0)$ 点处的切线方程;
 (II) 并判定在 $(0, +\infty)$ 上的增减性.

23. (本小题满分 12 分)

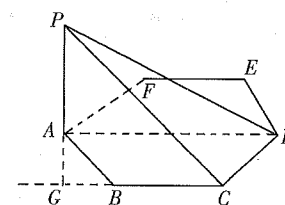
为了测河的宽, 在岸边选定两点 A 和 B , 望对岸标记物 C , 测得 $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CBA = 75^\circ$, $AB = 120\text{m}$, 求河的宽.



24. (本小题满分 12 分)

已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a , PA 为过点 A 而垂直于正六边形所在平面 M 的垂线, 且 $PA = a$, 求:

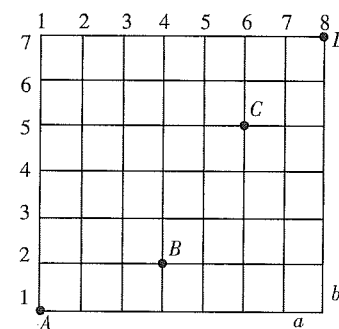
- (I) 点 P 到 AB, BC, CD 各边的距离;
 (II) PD 与平面 M 所成的角.



25. (本小题满分 13 分)

某城有东西方向的街道七条, 相邻两街的距离为 b ; 南北方向的街道八条, 相邻两街的距离为 a , 形成一个矩形.

- (I) 从 A 到 D 的最短途径有多少条?
 (II) 从 A 经 B 和 C 到 D 的最短途径有多少条?



参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $M=\{4,8,12,16,20\}, N=\{3,6,9,12,15,18\}$, 则 $M \cup N = \{3,4,6,8,9,12,15,16,18,20\}$.

2.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等式的变换.

【应试指导】 由 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$, 得 $(a-b) + \frac{b-a}{ab} = 0$, 则 $(a-b)(1 - \frac{1}{ab}) = 0 \Rightarrow a=b$ 或 $\frac{1}{ab} = 1$.

同理 $b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} \Rightarrow b=c$ 或 $\frac{1}{bc} = 1, a + \frac{1}{a} = c + \frac{1}{c} \Rightarrow a=c$ 或 $\frac{1}{ac} = 1. \therefore a=b=c$.

3.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的解析式.

【应试指导】 $\because f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$, 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$,

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2}} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t},$$

函数与用哪个英文字母无关, 只与对应法则、定义域有关.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数的性质.

【应试指导】 设 $f(x)=0$ 的根为 x_1, x_2, x_3, x_4 ,

$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore x_1, x_2, x_3, x_4$ 两两成对出现(如图),

$$x_1 = -x_3, x_2 = -x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

5.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反比例函数的图像.

【应试指导】 本题属于读图题型, 在寻求答案时, 要着重讨论方程的表达式.

$$\therefore |y| = \frac{1}{|x|},$$

$$\therefore (1) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } |y| = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, & y > 0 \\ -y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = -\frac{1}{x}, & y < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

$$\therefore (2) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } |y| = -\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x}, & y > 0 \\ -y = -\frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x}, & y < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{③} \\ \text{④} \end{matrix}$$

如图,

6.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 对于选项 A, 用两向量相等的定义便知其错.

7.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为弧度制的面积公式.

【应试指导】 利用弧度制中的面积公式 $S = \frac{1}{2} L \cdot r$. 如图,

$$\because x^2 + y^2 = 4 = 2^2,$$

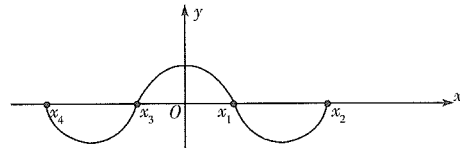
$$\therefore r = 2.$$

$$\widehat{AB} = L = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r,$$

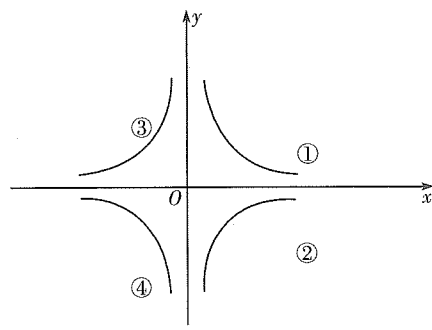
$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi \times 2}{4} \times 2 = \pi.$$

8.【答案】B

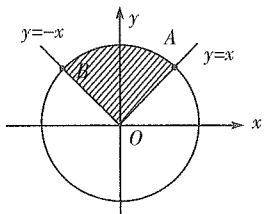
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为分类计数原理.



4 题答案图



5 题答案图



7 题答案图

【应试指导】 已知灯泡使用 1000 小时后好的概率为 0.2, 坏的概率为 $1 - 0.2 = 0.8$, 则三个灯泡使用 1000 小时以后, 可分别求得:

$$P(\text{没有坏的}) = C_3^0 \cdot 0.8^0 \cdot (0.2)^3 = 0.008,$$

$$P(\text{一个坏的}) = C_3^1 \cdot 0.8^1 \cdot (0.2)^2 = 0.096,$$

故最多只有一个坏的概率为: $0.008 + 0.096 = 0.104$.

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的离心率.

【应试指导】 求椭圆的离心率, 先求出 a, c . (如图)

$$\because \angle 1 = 60^\circ, \therefore b = \frac{a}{2}, c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{由椭圆定义知 } e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线与圆锥曲线的相交关系.

【应试指导】 考查直线与圆锥曲线的相交关系时, 应对它们的系数分四种情况讨论, 做到不重复、不遗漏.

$$\therefore \begin{cases} bx^2 + ay^2 = ab \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \\ y = ax + b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

$$\text{选项 A, } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}, \quad \text{② } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\text{选项 B, } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}, \quad \text{② } \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}.$$

$$\text{选项 C, } \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}, \quad \text{② } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\text{选项 D, } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}, \quad \text{② } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的表示.

【应试指导】 选项 A, 表示 A 或 B 发生或 C 不发生. 选项 C, 表示 A 不发生或 B、C 不发生. 选项 D, 表示 A 发生且 B、C 不发生.

12.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 选项 A 错, $\because \cos 2 < 0, (2 \in \text{第二象限角}) \therefore \sin 1 > 0, (1 \in \text{第一象限角}) \therefore \tan \pi = 0, \therefore \tan \pi < \sin 1$.

选项 B 错, $\because \cos 2\pi = 1, \cot \pi = \cot 3.14^\circ > 0, 1 < \cot 3.14^\circ < +\infty, 1 > \sin 1 > 0, \cos \pi > \sin 1$.

选项 C 错, $\because \cos 2 < 0, \cos 1 > 0, \therefore \cos 2 < \cos 1$.

选项 D 对, $\because \cos 2 < 0, 0 < \cos 1 < 1, 1 < \cot \pi < +\infty, \therefore \cos 2 < \cos 1 < \cot \pi$.

13.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆柱的母线长和侧面积.

【应试指导】 求母线的长, 可从圆柱的截面积中求出. 如图,

$$S_{\text{截面}} = 2r \cdot L = 10,$$

$$rL = 5, \quad \text{①}$$

$$V = \pi r^2 \cdot L = 5\pi \Rightarrow r^2 L = 5 \quad \text{②}$$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}} = \frac{r^2 L}{rL} = 1 \Rightarrow r = 1,$$

$$\therefore L = 5, S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot L = 2\pi \times 1 \times 5 = 10\pi.$$

14.【答案】C

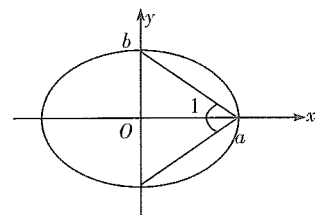
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二项展开式的性质.

【应试指导】 $(x - a^{-2})^6 = C_6^0 x^6 (-a^{-2})^0 + \dots + C_6^4 x^2 (-a^{-2})^4 + C_6^5 x^1 (-a^{-2})^5 + C_6^6 x^0 \cdot (-a^{-2})^6$, 末三项系数之和为 $C_6^4 (-1)^4 + C_6^5 (-1)^5 + C_6^6 (-1)^6 = C_6^4 - C_6^5 + C_6^6 = C_6^6 - C_6^1 + 1 = \frac{6 \times 5}{2} - 6 + 1 = 10$.

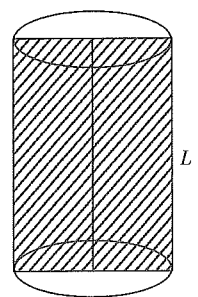
15.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最值.

【应试指导】 $\because y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$



9 题答案图



13 题答案图

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos 2x, \therefore y_{\max}=1.$$

注:求三角函数的最值时,应先将函数转化为 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的函数,再讨论函数的取值情况.

16.【答案】B

【考情点拨】本题主要考查的知识点为向量的夹角.

【应试指导】求 $\cos\langle a, b \rangle$, 可直接套用公式 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

$$a \cdot b = (3, 4) \cdot (0, -2) = 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8,$$

$$\cos\langle a, b \rangle = \frac{-8}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{0^2+(-2)^2}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}.$$

17.【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为两点间距离公式.

【应试指导】设 $B(x, 0)$, 由两点间的距离公式得:

$$|\overrightarrow{AB}| = 13 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (0-12)^2} = 13 \Rightarrow (x-5)^2 + 144 = 169 \Rightarrow x-5 = \pm 5 \Rightarrow x=10 \text{ 或 } x=0 \Rightarrow B \text{ 点坐标为 } (10, 0) \text{ 或 } (0, 0).$$

二、填空题

18.【答案】 $\{x | -2 < x \leq -1, \text{ 且 } x \neq -\frac{3}{2}\}$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+2 \leq 1 \\ x > -2 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leq -1, \text{ 且 } x \neq -\frac{3}{2},$$

$$\text{所以函数 } y = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}}{2x+3} \text{ 的定义域是 } \{x | -2 < x \leq -1, \text{ 且 } x \neq -\frac{3}{2}\}.$$

19.【答案】 $-\sqrt{\frac{1-m}{2}}$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为半角公式.

【应试指导】注意 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的正负.

$$\because 5\pi < \alpha < \frac{11}{2}\pi (\alpha \in \text{第三象限角}), \therefore \frac{5\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{11}{4}\pi \left(\frac{\alpha}{2} \in \text{第二象限角}\right),$$

$$\text{故 } \cos \frac{\alpha}{2} < 0, \text{ 又 } |\cos \alpha| = m, \therefore \cos \alpha = -m, \text{ 则 } \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-m}{2}}.$$

20.【答案】 $[\frac{1}{2}, 3]$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为函数的值域.

【应试指导】 $\because x^2 + y^2 \geq 1$, 令 $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$,

$$\text{则 } x^2 - xy + y^2 = 1 - \cos \alpha \sin \alpha = 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

$$\text{当 } \sin 2\alpha = 1 \text{ 时}, 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}, x^2 - xy + y^2 \text{ 取到最小值 } \frac{1}{2}.$$

$$\text{同理: } x^2 + y^2 \leq 2, \text{ 令 } x = \sqrt{2} \cos \beta, y = \sqrt{2} \sin \beta,$$

$$\text{则 } x^2 - xy + y^2 = 2 - 2 \cos \beta \sin \beta = 2 - \sin 2\beta,$$

$$\text{当 } \sin 2\beta = -1 \text{ 时}, x^2 - xy + y^2 \text{ 取到最大值 } 3.$$

21.【答案】4

【考情点拨】本题主要考查的知识点为线段的定比分点.

【应试指导】由直线方程的两点式可得, 过 $A(2, 1), B(3, -9)$ 的方程为:

$$L_{AB}: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-9-1}, \text{ 则 } \begin{cases} 10x+y-21=0 \\ 5x+y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{5} \\ y=-7 \end{cases},$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + \lambda \cdot 3}{1 + \lambda}, \text{ 即 } \frac{14}{5} = \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \Rightarrow \lambda = 4.$$

三、解答题

$$22. (I) y' = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} \Rightarrow k=1, \text{ 故所求切线方程为 } y-0=k(x-1) \Rightarrow y=x-1.$$

$$(II) \because y' = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } y' > 0,$$

$$\therefore y = \ln x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增.}$$

23. 如图,

$$\because \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰三角形, 则 } AC = AB = 120 \text{ m},$$

$$\text{过 } C \text{ 作 } CD \perp AB, \text{ 则由 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 可求得 } CD = \frac{1}{2}AC = 60 \text{ m}.$$

即河的宽为 60 m.

24. (I) 如图所示,

$$\because PA \perp \text{平面 } M, \therefore PA \perp BC,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 到 } AB \text{ 的距离为 } a.$$

$$\text{过 } A \text{ 作 } BC \text{ 的垂线交 } CB \text{ 的延长线于 } G, \text{ 连结 } PG,$$

$$\therefore BC \perp \text{平面 } APG, \text{ 即 } PG \perp AB,$$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a, PA = a,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle APG \text{ 中}, PG = \sqrt{PA^2 + AG^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a, \text{ 因此 } P \text{ 到 } BC \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

$$\because PA \perp \text{平面 } M,$$

$$\therefore AC \text{ 是 } PC \text{ 在平面 } M \text{ 上的射影},$$

$$\text{又 } \because AD \text{ 是正六边形 } ABCDEF \text{ 外接圆的直径},$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\text{因此 } AC \perp CD, \text{ 所以 } CD \perp \text{平面 } ACP, \text{ 即 } PC \text{ 是 } P \text{ 到 } CD \text{ 的距离},$$

$$\therefore AC = \sqrt{3}a, PA = a,$$

$$\therefore PC = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a, \text{ 因此 } P \text{ 到 } CD \text{ 的距离为 } 2a.$$

$$(II) \text{ 设 } PD \text{ 与 } DA \text{ 所夹的角为 } \alpha, \text{ 在 } \text{Rt}\triangle PAD \text{ 中}, \tan \alpha = \frac{PA}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

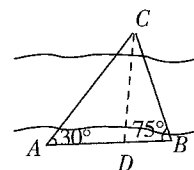
$$\therefore \alpha = \arctan \frac{1}{2} \text{ 为 } PD \text{ 与平面 } M \text{ 所夹的角}.$$

25. (I) 每一条最短途径有 6 段 b 及 7 段 a ,

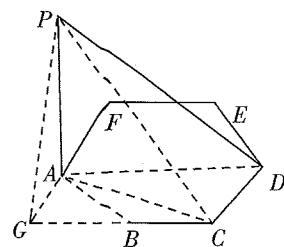
$$\text{因此从 } A \text{ 到 } D \text{ 的最短途径共 } \frac{13!}{7! \times 6!} = 1716 \text{ 条}.$$

(II) 同理, 从 A 到 B 再到 C , 最后到 D 的最短途径共

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{从 } A \text{ 到 } B \text{ 有 } \frac{(3+1)!}{3! \times 1!} \text{ 条} \\ \text{从 } B \text{ 到 } C \text{ 有 } \frac{(2+3)!}{2! \times 3!} \text{ 条} \\ \text{从 } C \text{ 到 } D \text{ 有 } \frac{(2+2)!}{2! \times 2!} \text{ 条} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 240. \end{aligned}$$



23 题答案图



24 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合 $A=\{x|-4\leq x<2\}$, $B=\{x|-1<x\leq 3\}$, 那么集合 $A\cap B=$ 【 】
 A. $\{x|-4<x<3\}$ B. $\{x|-4\leq x\leq 3\}$
 C. $\{x|-1<x<2\}$ D. $\{x|-1\leq x\leq 2\}$
- 若 $\sin\alpha>\tan\alpha$, $\alpha\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha\in$ 【 】
 A. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ B. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ C. $(0, \frac{\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
- 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 则下列函数中必为偶函数的是 【 】
 A. $y=|f(x)|$ B. $y=-|f(x)|$ C. $y=xf(x)$ D. $y=f(x)+f(-x)$
- 设 $0<a<b<1$, 则下列正确的是 【 】
 A. $a^4>b^4$ B. $4^{-a}<4^{-b}$ C. $\log_4 b<\log_4 a$ D. $\log_a 4>\log_b 4$
- 函数 $y=2^x$ 的图像与函数 $x=\log_2 y$ 的图像 【 】
 A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
 C. 关于直线 $y=x$ 对称 D. 是同一条曲线
- 下列函数中, 【 】不是周期函数.
 A. $y=\sin(x+\pi)$ B. $y=\sin\frac{1}{x}$ C. $y=1+\cos x$ D. $y=\sin 2\pi x$
- 6名学生和1名教师站成一排照相, 教师必须站在中间的站法有 【 】
 A. P_7^7 B. P_6^6 C. P_5^5 D. $2P_3^3$
- 设甲: $\Delta>0$, 乙: $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根, 则 【 】
 A. 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件 B. 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件
 C. 甲是乙的充分必要条件 D. 甲不是乙的充分条件, 也不是必要条件

- 已知向量 $a\perp b$, $a=(-1, 2)$, $b=(x, 2)$, 则 $x=$ 【 】
 A. 4 B. -8 C. 8 D. -4
- 正方形边长为 a , 围成圆柱, 体积为 【 】
 A. $\frac{a^3}{4\pi}$ B. πa^3 C. $\frac{\pi}{2}a^3$ D. $\frac{a^3}{2\pi}$
- 复数 $z=\frac{a^2-4a+3}{a-1}+(a^2-3a+2)i$ ($a\in\mathbf{R}$) 为实数, 则 $a=$ 【 】
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 以 $x^2-3x-1=0$ 的两个根的平方为根的一元二次方程是 【 】
 A. $x^2-11x+1=0$ B. $x^2+x-11=0$
 C. $x^2-11x-1=0$ D. $x^2+x+1=0$
- 圆 $\begin{cases} x=1+r\cos\theta \\ y=-2+r\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的圆心在 【 】 点上.
 A. (1, -2) B. (0, 5) C. (5, 5) D. (0, 0)
- 过点 $P(2, -3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线方程是 【 】
 A. $x+y+1=0$ 或 $3x+2y=0$ B. $x-y-1=0$ 或 $3x+2y=0$
 C. $x+y-1=0$ 或 $3x+2y=0$ D. $x-y+1=0$ 或 $3x+2y=0$
- 过点 $P(5, 0)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 相切的直线方程是 【 】
 A. $y=5$ B. $x=5$ C. $y=-5$ D. $x=-5$
- 参数方程 $\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 表示的图形为 【 】
 A. 直线 B. 圆 C. 椭圆 D. 双曲线
- 已知平面 α, β, γ 两两垂直, 它们三条交线的公共点为 O , 过 O 引一条射线 OP , 若 OP 与三条交线中的两条所成的角都是 60° , 则 OP 与第三条交线所成的角为 【 】
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 不确定

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

- 顶点在原点、焦点在 x 轴上且通径(过焦点和对称轴垂直的弦)长为6的抛物线方程为_____.
- $f(u)=u-1$, $u=\varphi(x)=\lg x$, 则 $f[\varphi(10)]=$ _____.
- 圆心在 y 轴上, 且与直线 $x+y-3=0$ 及 $x-y-1=0$ 都相切的圆的方程为_____.
- 若正三棱锥底面边长为 a , 且三条侧棱两两垂直, 则它的体积为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

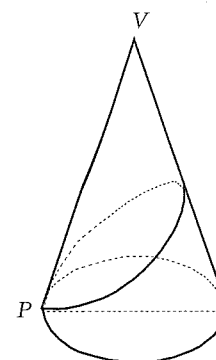
某工厂每月生产 x 台游戏机的收入为 $R(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206$ (百元),成本函数为 $C(x) = 50x + 100$ (百元),当每月生产多少台时,获利润最大? 最大利润为多少?

23. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, M, N 为圆与坐标轴的交点,求证:圆的弦 MN 是椭圆的切线.

24. (本小题满分 12 分)

已知正圆锥的底面半径是 1cm,母线为 3cm, P 为底面圆周上一点,由 P 绕过圆锥回到 P 点的最短路径如图所示,由顶点 V 到这条路线的最小距离是多少?



25. (本小题满分 13 分)

从椭圆上 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的右焦点引一条倾斜 45° 的直线,以这条直线与椭圆的两个交点 P, Q 及椭圆中心 O 为顶点,组成 $\triangle OPQ$.

- (I) 求 $\triangle OPQ$ 的周长;
- (II) 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】C

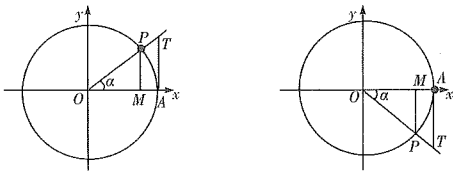
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap B = \{x | -4 \leq x < 2\} \cap \{x | -1 < x \leq 3\} = \{x | -1 < x < 2\}$.

2.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为利用三角函数线求角.

【应试指导】 首先做出单位圆,然后根据问题的约束条件,利用三角函数线找出满足条件的 α 角取值范围.



2 题答案图

$\because \sin \alpha > \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 又 $\because \sin \alpha = MP, \tan \alpha = AT$,

(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \alpha < \tan \alpha$.

(2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \sin \alpha > \tan \alpha$. 故选 B.

3.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 考查函数的奇偶性,只需将 $f(x)$ 中的 x 换成 $-x$,计算出 $f(-x)$,然后用奇函数,偶函数定义下结论.对于 A、B、C 项无法判断其奇偶性,而选项 D 有 $y = f(x) + f(-x)$,将 $f(x)$ 中的 x 换写成 $-x$ 有 $f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) + f(x) = y$.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 A 错, $\because 0 < a < b < 1, a^4 < b^4$.

B 错, $\because 4^{-a} = \frac{1}{4^a}, 4^{-b} = \frac{1}{4^b}, 4^b > 4^a, \therefore 4^{-a} > 4^{-b}$.

C 错, $\because \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore \log_4 b > \log_4 a$.

D 对, $\because 0 < a < b < 1, \log_a x$ 为减函数,对大底小.

5.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数的图像.

【应试指导】 函数 $y = 2^x$ 与函数 $x = \log_2 y$,是指对函数的两种书写方式,不是互为反函数,故是同一条曲线,但在 $y = 2^x$ 中, x 为自变量, y 为函数,在 $x = \log_2 y$ 中, y 为自变量, x 为函数.

6.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期性.

【应试指导】 A 是周期函数, B 不是周期函数, C 是周期函数, D 是周期函数.

7.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 此题是有条件限制的排列问题,让教师站在中间,6 名学生的全排列有 P_6^6 种.

8.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 甲: $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 乙: $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根.

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的垂直.

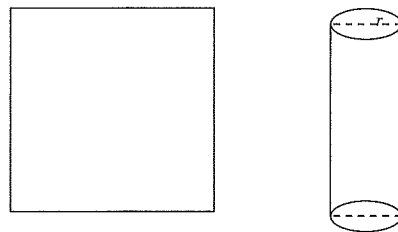
【应试指导】 $\because a \perp b$,

$\therefore a \cdot b = (-1, 2) \cdot (x, 2) = 0$, 即 $-1 \cdot x + 2 \times 2 = 0, -x + 4 = 0, x = 4$.

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆柱的体积.

【应试指导】 欲求圆柱的体积,由体积公式可知,必须知道圆柱的高(即正方形的边长)、半径.半径可由圆柱的周长等于正方形的边长求出.如图,



10 题答案图

$\because C = 2\pi r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2\pi}$,

$V_{\text{柱}} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \pi \cdot \frac{a^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot a = \frac{a^3}{4\pi}$.

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的概念.

【应试指导】 由题意知, $\begin{cases} a \neq 1 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$.

12.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为根与系数的关系.

【应试指导】 设 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ,则由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -1$.

又所求方程的两根为 x_1^2, x_2^2 ,

则 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 11, x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 1$,

$\therefore$ 所求方程为 $x^2 - 11x + 1 = 0$.

13.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的参数方程.

【应试指导】 因为 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = -2 + r \sin \theta \end{cases}$, $\therefore$ 圆的圆心为 $O(1, -2)$.

14.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的截距.

【应试指导】 若直线在两坐标轴上截距相等,将直线方程转化为截距式容易判别.

选项 A 对.

选项 B 错,直线 $x - y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

选项 C 错,直线 $x + y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

选项 D 错,直线 $x - y + 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

15.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线.

【应试指导】 将圆的一般方程配方得出圆的标准方程.

$\because x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9 = 3^2$,

则点 $P(5, 0)$ 在圆上只有一条切线(如图),即 $x = 5$.

16.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为参数方程.

【应试指导】 $\because$ 在 $\cos \varphi, \sin \varphi$ 中 φ 为参数,消去 φ 得, $x^2 + y^2 = 1$,即半径为 1 的圆,圆心在原点.

17.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为异面直线间的夹角.

【应试指导】 将 α, β, γ 看成是长方体中有公共点的三个面, OP 看成是长方体的对角线,应选 B.

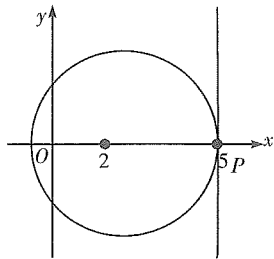
二、填空题

18.【答案】 $y^2 = \pm 6x$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的方程.

【应试指导】 设抛物线的方程为 $y^2 = \pm 2px$,则焦点 $F(\pm \frac{p}{2}, 0)$,所以有 $(\frac{6}{2})^2 = \pm 2p(\pm \frac{p}{2})$,得 $p = \pm 3$,

故抛物线方程为 $y^2 = \pm 6x$.



15 题答案图

19.【答案】0

【考情点拨】本题主要考查的知识点为复合函数求值.

【应试指导】 $\because \varphi(x) = \lg x$,

$$\therefore \varphi(10) = \lg 10 = 1,$$

$$\therefore f[\varphi(10)] = \varphi(10) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

20.【答案】 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为圆的切线的性质.

【应试指导】设圆的方程为 $(x-0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, (如图)

圆心为 $O'(0, y_0)$.

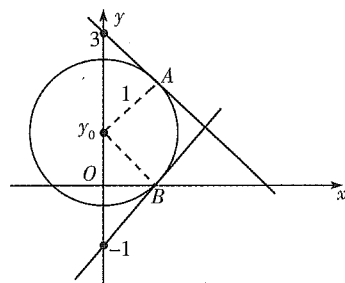
$|O'A| = |O'B|$, 即

$$\frac{|0+y_0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|0-y_0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}},$$

$$|y_0-3| = |-y_0-1| \Rightarrow y_0 = 1,$$

$$r = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 2.$$



20 题答案图

21.【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为正三棱锥的体积.

【应试指导】 $\because S_{\triangle} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

由题意知正三棱锥的侧棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = h^2,$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}a, V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3.$$

三、解答题

22. 利润 = 收入 - 成本,

$$L(x) = R(x) - C(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206 - (50x + 100) = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306.$$

法一: 用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a < 0$ 时有最大值.

$$\because a = -\frac{4}{9} < 0,$$

$$\therefore y = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306 \text{ 是开口向下的抛物线, 有最大值,}$$

$$\text{当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, 即 } x = -\frac{80}{2 \times (-\frac{4}{9})} = 90 \text{ 时,}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

$$\text{可知 } y = \frac{4 \times (-\frac{4}{9}) \times (-306) - 80^2}{4 \times (-\frac{4}{9})} = 3294.$$

法二: 用导数来求解.

$$\because L(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306,$$

$$\text{求导 } L'(x) = -\frac{4}{9} \times 2x + 80,$$

$$\text{令 } L'(x) = 0, \text{ 求出驻点 } x = 90.$$

$\because x = 90$ 是函数在定义域内唯一驻点,

$\therefore x = 90$ 是函数的极大值点, 也是函数的最大值点, 其最大值为 $L(90) = 3294$.

23. 如下图,

$\because M, N$ 为圆与坐标轴的交点, 不妨取 M, N 在 y, x 轴的正方向,

$$\therefore M(0, \sqrt{a^2 + b^2}), N(\sqrt{a^2 + b^2}, 0),$$

由直线的截距式可知, 弦 MN 的方程为:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

直线方程与椭圆方程联立得

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

$$\text{可得 } (a^2 + b^2)x^2 - 2a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}x + a^4 = 0,$$

$$\text{而 } \Delta = (2a^2 \sqrt{a^2 + b^2})^2 - 4(a^2 + b^2)a^4 = 0,$$

可知二次方程有两个相等实根, 因而 MN 是椭圆的切线.

同理, 可证其他 3 种情况弦 MN 仍是椭圆的切线.

24. 圆锥的曲面沿着母线剪开, 展开成一个平面(如下图),

其半径 $VP = 3$, 弧长 $= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ 的扇形,

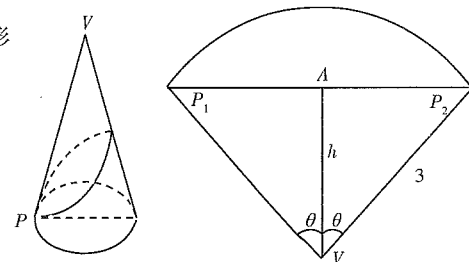
$\because$ 圆锥的底面半径为 1, 于是围绕圆锥的最短路线对应于扇形

内是 P_1 到 P_2 的最短距离, 就是弦 P_1P_2 ,

由 V 到这条路线的最短距离是图中的线段 $h = AV$,

依据弧长公式 $2\pi = 2\theta \cdot 3$,

$$\text{得 } \theta = \frac{\pi}{3}, \therefore h = 3 \cos \theta = 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$



24 题答案图

25. 椭圆方程变形为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ (如图),

$$\therefore a^2 = 2, b^2 = 1,$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2, \therefore c = 1,$$

直线方程为: $y = x - 1$,

直线方程与椭圆方程联立:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点为 } P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}), Q(0, -1),$$

$$(I) \triangle OPQ \text{ 的周长} = |OQ| + |OP| + |PQ|$$

$$= 1 + \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} + \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{1}{3} + 1)^2}$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{17}{9}} + \sqrt{\frac{32}{9}} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

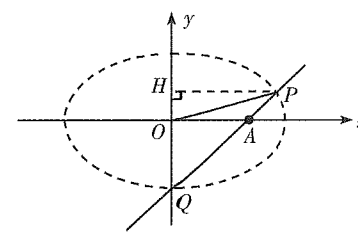
$$= \frac{1}{3}(3 + \sqrt{17} + 4\sqrt{2}).$$

(II) 作 $PH \perp y$ 轴, 则 $PH = \frac{4}{3}$,

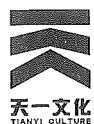
$$S_{\triangle PQO} = \frac{1}{2} |OQ| \cdot |PH|$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.$$



25 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合 $M=\{2,3,5,a\}$, $N=\{1,3,4,b\}$, 若 $M \cap N = \{1,2,3\}$, 则 a, b 的值为 【 】
A. $a=2, b=1$ B. $a=1, b=1$ C. $a=1, b=2$ D. $a=1, b=5$
- 若 α 是三角形的一个内角, 则必有 【 】
A. $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$ B. $\cos \alpha > 0$ C. $\cot \frac{\alpha}{2} > 0$ D. $\tan \alpha < 0$
- 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,1)$, 那么 $f(2x-1)$ 的定义域是 【 】
A. $[0,1)$ B. $[-3,1)$ C. $[-1,1)$ D. $[-1,0)$
- $f(x)$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 若 $f(\frac{1}{2}) > 0 > f(\sqrt{3})$, 则方程 $f(x)=0$ 的根的个数是 【 】
A. 2 B. 2 或 1 C. 3 D. 2 或 3
- 对满足 $a > b$ 的任意两个非零实数, 下列不等式成立的是 【 】
A. $\sqrt{|a|} > \sqrt{|b|}$ B. $\lg a^2 > \lg b^2$ C. $a^4 > b^4$ D. $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$
- 下列函数中, 最小正周期为 π 的偶函数是 【 】
A. $y=\sin x$ B. $y=\cos \frac{x}{2}$ C. $y=\sin 2x + \cos 2x$ D. $y=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
- 由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字且数字 1 与 2 不相邻的五位数有 【 】
A. 36 个 B. 72 个 C. 120 个 D. 96 个
- 与直线 $2x-4y+4=0$ 的夹角为 45° , 且与这直线的交点恰好在 x 轴上的直线方程是 【 】
A. $x-3y+2=0$ B. $3x+y+6=0$
C. $x-3y+2=0$ 或 $3x-y+6=0$ D. $x+3y+2=0$ 或 $3x-y+6=0$

- 如果不共线的向量 a 和 b 有相等的长度, 则 $(a+b)(a-b)=$ 【 】
A. 0 B. 1 C. -1 D. 2
- 当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时, 圆锥轴截面的顶角是 【 】
A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°
- 设 $Z \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ 为复数集), 且满足条件 $|Z-2|+|Z+2|=10$, 那么复数 Z 对应的点的集合表示的图形为 【 】
A. 圆 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 双曲线
- $x=45^\circ$ 是 $\tan x=1$ 的 【 】
A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
- 设直线的参数方程为 $\begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \end{cases}$ (t 为参数), 则此直线在 y 轴上的截距是 【 】
A. 5 B. -5 C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$
- 已知直线 $l_1: x+2=0$ 和 $l_2: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$, l_1 与 l_2 的夹角是 【 】
A. 45° B. 60° C. 120° D. 150°
- 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 所得的劣弧所对的圆心角为 【 】
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
- 函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数, 且是以 5 为周期的奇函数, $f(-2)=1$, 则 $f(12)$ 等于 【 】
A. 1 B. -1 C. 5 D. -5
- 直三棱柱的每个侧面的面积为 5, 底面积是 10, 全面积是 【 】
A. 15 B. 20 C. 25 D. 35

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

- 已知 $A(-1, -1)$, $B(3, 7)$ 两点, 则线段 AB 的垂直平分线方程为_____.
- $(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式是_____.
- 设离散型随机变量 ξ 的分布列如下表所示, 那么 ξ 的期望等于_____.

ξ	100	90	80
P	0.2	0.5	0.3

- 不等式 $\frac{2x+1}{1-2x} > 0$ 的解集为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

已知等差数列前 n 项和 $S_n = 2n^2 - n$.

- (I) 求这个数列的通项公式;
- (II) 求数列第六项到第十项的和.

23. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = e^x - x - 1$.

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 求 $f(x)$ 的极值.

24. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, 问实数 m 在什么范围内, 过点 $(0, m)$ 存在两条互相垂直的直线都与椭圆有公共点.

25. (本小题满分 13 分)

正三棱柱 $ABC-A'B'C'$, 底面边长为 a , 侧棱长为 h .

- (I) 求点 A 到 $\triangle A'BC$ 所在平面的距离 d ;
- (II) 在满足 $d=1$ 的上述正三棱柱中, 求侧面积的最小值.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $M \cap N = \{2, 3, 5, a\} \cap \{1, 3, 4, b\} = \{1, 2, 3\}$,

又 $\because M$ 中无“1”元素,而有“a”元素,只有 $a=1$,

而 N 中无“2”元素,而有“b”元素,只有 $b=2$.

2.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数值的符号.

【应试指导】 $\because 0 < \alpha < \pi, 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

A 错误, $\because \sin \frac{\alpha}{2} > 0$.

B 错误, ① $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 即 α 为锐角 $\cos \alpha > 0$,

② $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 即 α 为钝角 $\cos \alpha < 0$,

两种情况都有可能出现, $\therefore \cos \alpha$ 不能确定.

D 错误, $\because \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \sin \alpha > 0$ 而 $\cos \alpha$ 不能确定, $\therefore D$ 不确定.

选项 C, $\because$ ① $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \cot \frac{\alpha}{2} > 0$,

又 $\because$ ② $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \cot \frac{\alpha}{2} > 0$

此两种情况均成立, 故选 C.

3.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 由已知, 得 $-1 \leq 2x-1 < 1, 0 \leq 2x < 2$, 故求定义域为 $0 \leq x < 1$.

4.【答案】A

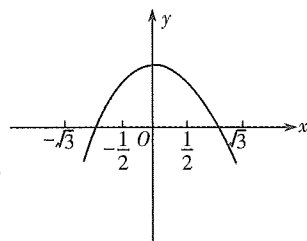
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数的性质.

【应试指导】 由已知 $f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x)$ 关于 y 轴对称,

得 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) > 0, f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) < 0$,

由函数连续性知, x 由 $-\sqrt{3}$ 变化到 $-\frac{1}{2}$, 函数值由负变为正, x 由 $\frac{1}{2}$ 变化到 $\sqrt{3}$, 函

数值由正变为负, 故方程 $f(x) = 0$ 的根的个数是 2 (用图表示, 如下图).



4 题答案图

5.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 A 错误, 例如: $-2 > -4$, 而 $\sqrt{-2} < \sqrt{-4}$.

B 错误, 例如: $-10 > -100$, 而 $\lg(-10)^2 < \lg(-100)^2$.

C 错误, 例如: $-1 > -2$, 而 $(-1)^4 < (-2)^4$.

D 对, $a > b, \therefore -a < -b$, 又 $\therefore \begin{cases} (\frac{1}{2})^a = 2^{-a} \\ (\frac{1}{2})^b = 2^{-b} \end{cases}$,

$\therefore 2^{-a} < 2^{-b}$ 即 $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$.

6.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期性奇偶性.

【应试指导】 $\because$ A 选项, $T=2\pi$, 是奇函数.

B 选项, $T=4\pi$, 是偶函数.

C 选项, $T=\pi$, 是非奇非偶函数.

D 选项, $y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} = (1 - \tan^2 x) \cdot \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 且为偶函数.

7.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 用间接法计算, 先求出不考虑约束条件的所有排列, 然后减去不符合条件的.

由 1, 2, 3, 4, 5 可组成 P_5^5 个五位数组.

1, 2 相邻的有 P_4^4 个, 即把 1, 2 看成一个元素与剩下的 3, 4, 5 共四个元素的排列, 有 P_4^4 种, 但 1 在前或在后又有两种, 共 $2P_4^4$ 种.

所求排法共有 $P_5^5 - 2P_4^4 = 120 - 2 \times 24 = 120 - 48 = 72$ 种.

8.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两直线的夹角公式.

【应试指导】 A, B 只有一个直线方程, 排除, 从 C, D 中选.

$\because 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, 由两条直线的夹角公式, 得

$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - k_2}{1 + \frac{1}{2} k_2} \right| = 1 \Rightarrow k_2 = 3 \text{ 或 } k_2 = -\frac{1}{3},$$

两直线的交点为 $(-2, 0)$, $\therefore$ 得 $3x - y + 6 = 0, x + 3y + 2 = 0$.

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的运算.

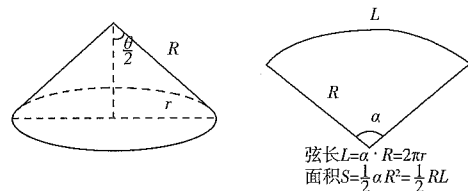
【应试指导】 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = |a|^2 - |b|^2$,

$\because |a| = |b|, \therefore |a|^2 - |b|^2 = 0$.

10.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆锥的轴截面的顶角.

【应试指导】 求圆锥的轴截面的顶角, 先画出轴截面 (如下图), 可知轴截面为等腰三角形, 圆锥的侧面是扇形, 圆锥底面的周长等于展开侧面的扇形的弧长.



10 题答案图

$$\because S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} RL, \text{ 由已知 } \frac{S_{\text{侧}}}{S_{\text{底}}} = \frac{\frac{1}{2} RL}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2} R \cdot 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{R}{r} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} r,$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{2} r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 45^\circ, \therefore \theta = 90^\circ.$$

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的定义.

【应试指导】 如图, 设 $\vec{OZ}$ 是满足条件的向量,

$$\vec{OF}_1 = -2, \vec{OF}_2 = 2,$$

$$|Z-2| = |\vec{OZ} - \vec{OF}_2| = |\vec{F}_2 Z|,$$

$$|Z+2| = |Z - (-2)| = |\vec{OZ} - \vec{OF}_1| = |\vec{F}_1 Z|,$$

$\therefore |Z+2| + |Z-2| = 10$ 就是以 $F_1 Z$ 与 $F_2 Z$ 的模的和恒等于 10, 所以 Z 点的集合恰是以 F_1, F_2 为焦点, 长轴等于 10 的椭圆.

12.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $\because x=45^\circ \Rightarrow \tan x=1, \therefore x=45^\circ$ 是 $\tan x=1$ 的充分条件,

又 $\because \tan x=1 \Rightarrow x=45^\circ + k \cdot 180^\circ$, 不一定能推出 $x=45^\circ$,

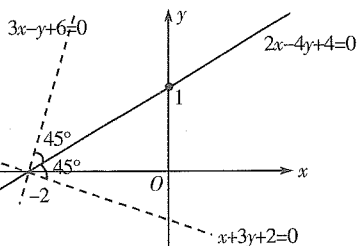
$\therefore x=45^\circ$ 是 $\tan x=1$ 的充分但非必要条件.

13.【答案】C

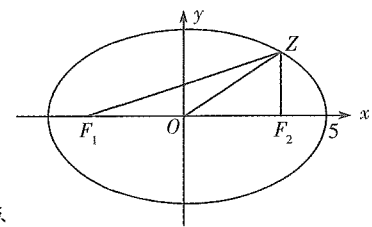
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的参数方程.

【应试指导】 直线的参数方程为 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}, \therefore \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 5 \\ y_1 = 4, y_2 = 5 \end{cases},$$



8 题答案图



11 题答案图

直线两点式方程: $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{5-4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $\therefore$ 直线在 y 轴上的截距为 $\frac{5}{2}$.

14. [答案] B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两直线的夹角.

【应试指导】 直线 l_1 与 l_2 相交所成的锐角或直角叫做 l_1 与 l_2 的夹角, 即 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 而选项 C、D 都大于 90° , $\therefore$ C、D 排除,

$\therefore l_1$ 的斜率不存在, 所以不能用 $\tan \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$ 求夹角, 可画图观察出 $\theta = 60^\circ$.

15. [答案] C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆心角.

【应试指导】 如图, 要求圆心角, 先找出直线与圆的交点, 两个交点之间的劣弧所对的圆心角即为所求.

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$A(1, \sqrt{3}), B(2, 0)$, 连接 OA, OB , 则 $\angle AOB$ 为所求的圆心角,

$$\therefore \tan \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

16. [答案] B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为奇函数与周期函数的性质.

【应试指导】 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-2) = -f(2)$,

$$\therefore f(2) = -1,$$

$\because 5$ 为 $f(x)$ 的周期, $\therefore f(x+5) = f(x)$, $\therefore f(12) = f(5 \times 2 + 2) = f(2) = -1$.

17. [答案] D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直三棱柱的全面积.

【应试指导】 求全面积 = 侧面积 + 2 底面积 = $5 \times 3 + 10 \times 2 = 35$, 应选 D. 误选 C, 错误的原因是只加了一个底面的面积.

二、填空题

18. [答案] $x + 2y - 7 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为线段的垂直平分线.

【应试指导】 设线段的垂直平分线上任一点为 $P(x, y)$,

则 $|PA| = |PB|$, 即

$$\sqrt{[x - (-1)]^2 + [y - (-1)]^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2},$$

整理得, $x + 2y - 7 = 0$.

19. [答案] $64x^6 - 192x^4 + \dots + \frac{1}{x^6}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二项展开式.

【应试指导】 $(2x - \frac{1}{x})^6 = C_6^0 (2x)^6 \cdot (-\frac{1}{x})^0 + C_6^1 (2x)^5 \cdot (-\frac{1}{x})^1 + \dots + C_6^5 (2x)^1 \cdot (-\frac{1}{x})^5 + C_6^6 (2x)^0 \cdot (-\frac{1}{x})^6 = 2^6 x^6 + 6 \times 2^5 \cdot$

$$x^5 \cdot (-1)^1 x^{-1} + \dots + \frac{1}{x^6} = 64x^6 - 192x^4 + \dots + \frac{1}{x^6}.$$

20. [答案] 89

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机变量的期望.

【应试指导】 $E(\xi) = 100 \times 0.2 + 90 \times 0.5 + 80 \times 0.3 = 89$.

21. [答案] $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $\frac{2x+1}{1-2x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ 1-2x < 0 \end{cases}$ ②

① 的解集为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ② 的解集为 $\emptyset$,

$$\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\} \cup \emptyset = \{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}.$$

三、解答题

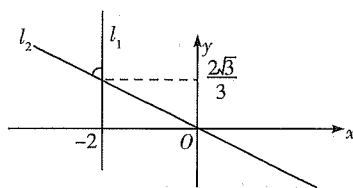
22. (I) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= (2n^2 - n) - [2(n-1)^2 - (n-1)]$$

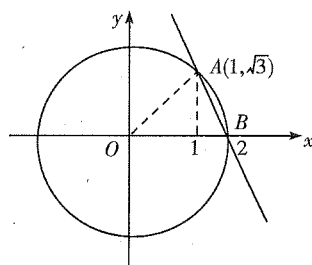
$$= 2n^2 - n - 2n^2 + 4n - 2 + n - 1 = 4n - 3 (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 4 \times 1 - 3 = 1$,

$$\therefore a_n = 4n - 3.$$



14 题答案图



15 题答案图

$$(II) S_{10} - S_5 = (2 \times 10^2 - 10) - (2 \times 5^2 - 5) = 145.$$

23. (I) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, e^x - 1 = 0, \text{ 得 } x = 0,$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 单调增加.

(II) $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$,

又 $\because f(x)$ 在 $x=0$ 左侧单调减少, 在 $x=0$ 右侧单调增加,

$\therefore x=0$ 为极小值点, 且 $f(x)$ 的极小值为 0.

24. 由椭圆方程可知, 当 $|m| \leq 3$ 时, 存在过点 $(0, m)$ 的两条互相垂直的直线, 都与椭圆有公共点.

当 $|m| > 3$ 时, 设 l_1, l_2 是过 $(0, m)$ 的两条互相垂直的直线,

如果它们都与椭圆有公共点, 则它们都不可能平行,

$$\text{设方程 } l_1: y = kx + m, l_2: y = -\frac{1}{k}x + m,$$

l_1 与椭圆有公共点的充要条件是

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(kx+m)^2}{9} = 1$$

即 $(9+16k^2)x^2 + 32kmx + 16m^2 - 144 = 0$ 有实根,

$$\text{即 } (16km)^2 - (9+16k^2)(16m^2-144) \geq 0.$$

$$\text{得 } k^2 \geq \frac{m^2-9}{16}.$$

同理, l_2 与椭圆有公共点的充要条件是 $\frac{1}{k^2} \geq \frac{m^2-9}{16}$, $(\frac{m^2-9}{16})^2 \leq 1$, 即 $|m| \leq 5$.

25. (I) 在三棱锥 $A'-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 为正三角形,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2,$$

$$\text{又 } \because AA' = h, \therefore V_{A'-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h,$$

在 $\text{Rt} \triangle ABA'$ 中, $(A'B)^2 = h^2 + a^2$,

在等腰 $\triangle A'BC$ 中, 设底边的高为 h' , 则

$$h' = \sqrt{(A'B)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{h^2 + a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + 3a^2},$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{a}{4} \sqrt{4h^2 + 3a^2},$$

$$V_{A'-BCA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \sqrt{4h^2 + 3a^2} \cdot d,$$

由于 $V_{A'-BCA'} = V_{A'-ABC}$,

$$\therefore d = \frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

(II) 当 $d=1$ 时,

$$\text{由 (I) 得 } \sqrt{3}ah = \sqrt{4h^2 + 3a^2},$$

$$3a^2 h^2 = 4h^2 + 3a^2 \geq 2\sqrt{4h^2 \cdot 3a^2} \text{ (均值定理)},$$

$$3a^2 h^2 \geq 4\sqrt{3}ah,$$

$$\because ah > 0, \therefore 3ah \geq 4\sqrt{3},$$

当且仅当 $3a^2 = 4h^2$ 时, 等号成立,

又 $\because 3ah$ 是此三棱柱的侧面积, 故其最小值为 $4\sqrt{3}$.