

第六章 两角和与差的三角函数

本章要求

掌握两角和, 两角差, 二倍角的正弦, 余弦, 正切的公式, 会用它们进行计算, 化简和证明。

内容提要

一、两角和与两角差的三角函数

$$1, \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2, \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$3, \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

二、二倍角的三角函数

$$1, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$3, \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

例题 1 已知 $\tan x = 3$, 则 $\tan(x + \pi/4) =$

A. 2 【2016 年真题】

B. 1/2

C. -2

D. -4

【答案】C

【解析】

$$\begin{aligned} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{3+1}{1-3} = -2 \end{aligned}$$

例题 2 已知 $\tan x = 2$, 则 $\tan(x + \pi) =$

A. -2 【2015 年真题】

B. 2

C. 1/2

D. -1/2

【答案】B

【解析】

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\tan x + \tan \pi}{1 - \tan x \tan \pi} \\ &= \frac{2+0}{1-0} = 2\end{aligned}$$

例题3 $\sin(-15^\circ) =$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

【解析】

$$\begin{aligned}\sin(-15^\circ) &= \sin[30^\circ + (-45^\circ)] \\ &= \sin(30^\circ)\cos(-45^\circ) + \cos(30^\circ)\sin(-45^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

例题4 已知 $\tan(x+y)=5, \tan x=2$, 则 $\tan y =$

【答案】 $\frac{3}{11}$

【解析】

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ 5 &= \frac{2 + \tan y}{1 - 2 \tan y} \Rightarrow 5 - 10 \tan y = 2 + \tan y \\ 11 \tan y &= 3 \Rightarrow \tan y = \frac{3}{11}\end{aligned}$$

例题5 $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} =$

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

$$\begin{aligned}\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}\end{aligned}$$

例题6

$$\begin{aligned}\cos 12^\circ \cos 98^\circ - \sin 12^\circ \sin 98^\circ &= \\ A; \cos 20^\circ; B \sin 20^\circ; C; -\cos 20^\circ; D; -\sin 20^\circ\end{aligned}$$

【答案】D

【解析】

$$\begin{aligned}& \cos 12^{\circ} \cos 98^{\circ} - \sin 12^{\circ} \sin 98^{\circ} \\&= \cos(12^{\circ} + 98^{\circ}) = \cos 110^{\circ} \\&= -\cos 70^{\circ} = -\sin 20^{\circ}\end{aligned}$$