

第十一章 排列、组合和二项式定理

本章要求

- (1)了解加法原理和乘法原理
- (2)理解排列组合的意义,掌握排列数和组合数的计算公式。
- (3)会解排列组合的简单应用题
- (4)了解二项式定理,会用二项展开式的性质和通项公式解决简单问题。

内容提要

一、排列与组合

1 两个原理

(1)加法原理;完成一件事情有 n 类方式,第一类方式有 m_1 种方法,第二类方式有 m_2 种方法,.....第 n 类方式有 m_n 种方法,那么完成这件事情总的方法数是 $N=m_1+m_2+\dots+m_n$

(2)乘法原理;完成一件事情有 n 个步骤,第一个步骤有 m_1 种方法,第二个步骤有 m_2 种方法,.....第 n 个步骤有 m_n 种方法,那么完成这件事情总的方法数是 $N=m_1m_2\dots m_n$

2 排列组合的有关概念、基本公式和性质

(1)排列;与顺序有关,记作 $P_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

(2)组合;与顺序无关,记作 $C_n^m = \frac{P_n^m}{m!}; C_n^0 = 1; C_n^m = C_n^{n-m}$

二、二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2$$

1 定理; $+ \dots + C_n^r a^{n-r}b^r + \dots + C_n^n b^n$

2 通项公式;

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}b^r$$

3 性质

- (1) a 的指数由 n 变化到 0 , b 的指数由 0 变化到 n
- (2)共有 $n+1$ 项,且中间一项或两项系数最大
- (3)第 k 项和倒数第 k 项的系数相等

例题 1 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中, x^{-3} 的系数是

【2018 年真题】

- A 10
B 5
C 1

D -5

【答案】B

【解析】

$$C_5^t x^{5-t} \left(-\frac{1}{x}\right)^t = C_5^t x^{5-2t} (-1)^t$$

$$5-2t=-3 \Rightarrow t=4$$

$$C_5^4=5$$

例题2 一个圆上有5个不同的点,以这5个点中任意3个为顶点的三角形共有

- A 60 B 15 【2017年真题】
C 5 D 10

【答案】D

【解析】 $C_5^3=10$

例题3 $(1+2x)^8$ 的展开式中,第2项的系数是

- A 16 B 28 【2016年真题】
C 56 D 112

【答案】A

【解析】 $C_8^1(2x) \Rightarrow 16$

例题4 某学校为新生开设了4门选修课程,规定每位新生至少要选3门,则一位新生不同的选课方案共有

- A 7 B 4 【2015年真题】
C 5 D 6

【答案】C

【解析】 $C_4^3+C_4^4=5$

例题5 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^3$ 的展开式中常数项是

【2014年真题】

- A 3
B 2
C -2
D -3

【答案】D

【解析】

$$C_3^t (\sqrt{x})^{3-t} \left(-\frac{1}{x}\right)^t = C_3^t x^{\frac{3-t}{2}-1} (-1)^t$$

$$\frac{3-t}{2} - t = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$C_3^1 (-1) = -3$$

例题6 5支球队比赛, 第一轮每2队之间比赛一场, 第二轮由第一轮比赛的前2名决冠军, 3,4名决季军, 共几场比赛

- A 6 B 8
C 10 D 12

【答案】D

【解析】 $C_5^2 + 2 = 12$

例题7 从7名男生和5名女生中选5人组成代表队, 其中要求男生3名, 女生2名, 则不同的选法共有

- A 45 B 350
C 792 D 4200

【答案】B

【解析】 $C_7^3 C_5^2 = 350$

例题8 从13名学生中选出2人担任正、副班长, 不同的选举结果共有

- A 26 B 78
C 156 D 169

【答案】C

【解析】 $P_{13}^2 = 156$

例题9 10名学生, 其中3名女生, 现从中选出2人当代表, 要求至少有1名女生当选, 共有多少种选法

- A 21 B 24
C 27 D 63

【答案】B

【解析】 $C_3^1 C_7^1 + C_3^2 = 24$

例题 10 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中第 6 项是

- A x^{-3} B $-6x^{-\frac{3}{2}}$
C $6x^{-\frac{3}{2}}$ D $-6x^{-\frac{5}{2}}$

【答案】B

【解析】

$$C_6^5(x)^1\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = -6x^{-\frac{3}{2}}$$

例题 11 $\left(x^2 - \frac{1}{2y}\right)^8$ 的展开式中所有项系数总和是

- A 2^8 B $\frac{1}{2^8}$
C 0 D 1

【答案】B

【解析】让 $x=y=1$ 代入上式便得

例题 12 $(1-2x)^5(2+x)$ 的展开式中 x^3 的系数

- A -120 B 120
C 100 D -100

【答案】A

【解析】

$$(1-2x)^5(2+x) = 2(1-2x)^5 + x(1-2x)^5$$

对于第一部分： $2C_5^3(-2x)^3$ 系数为 -160

对于第二部分： $x C_5^2(-2x)^2$ 系数为 40

$$-160 + 40 = -120$$

例题 13 $(x^3 + y^2)^n$ 的展开式中第 4 项与第 6 项的系数相等，则此展开式中有多少项

- A 10 B 11

C 9

D 8

【答案】D

【解析】

$$C_n^3 = C_n^5 \\ \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$20 = n^2 - 7n + 12$$

$$n^2 - 7n - 8 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+1) \Rightarrow n = 8$$