

第十五章 直线与平面

本章要求

- (1) 了解平面的基本性质
- (2) 了解空间两条直线的位置关系以及异面直线所成角的概念
- (3) 了解空间直线和平面的位置关系, 理解直线与平面垂直的概念, 理解点到平面距离的概念, 理解直线和平面平行, 垂直的判定定理和性质定理
- (4) 了解射影以及直线与平面所成角的概念
- (5) 了解空间两个平面的位置关系, 二面角概念
- (6) 理解空间向量的概念
- (7) 掌握利用向量解决空间直线的平行, 垂直, 夹角等几何问题。

内容提要

一、平面的基本性质

公理 1 如果一条直线的两个点在一个平面内, 那么这条直线所有的点都在这个平面内 (了解)

公理 2 如果两个平面有一个公共点, 那么它们通过经过这个点的一条直线 (了解)

公理 3 不在同一条直线上的三个点确定一个平面

推论 1 一条直线和直线外的一点确定一个平面

推论 2 两条相交直线确定一个平面

推论 3 两条平行直线确定一个平面

二、空间的两条直线

1 平行 相交 异面

2 公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行

3 两条异面直线所成的角

三、直线和平面

1 位置关系: 相交 平行 直线在平面内

2 直线与平面平行

(1) 线面平行判定:

$$\begin{cases} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \Rightarrow a // b \\ a // b \end{cases}$$

(2) 线面平行性质

$$\begin{cases} a // \alpha \\ a \subset \beta \Rightarrow a // b \\ \alpha \cap \beta = b \end{cases}$$

3 直线与平面垂直

(1) 线面垂直的判定:

$$1, \begin{cases} m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \cap n = B \\ l \perp m, l \perp n \end{cases} \Rightarrow l \perp \alpha$$

$$2, \begin{cases} a // b \\ a \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp \alpha$$

(2) 性质定理：垂直于同一平面的两条直线平行

4 距离

(1) 点到平面的距离

(2) 直线到平面的距离

5 射影

6 直线与平面所成的角

四、平面与平面之间的位置关系

1 面面平行

(1) 判定定理

$$1, \begin{cases} a \subset \beta, b \subset \beta, a \cap b = A \\ a // \alpha, b // \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$$

$$2, \begin{cases} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta$$

(2) 性质定理

两个平面平行，那么其中一个平面内的直线必平行于另一个平面；

如果两个平行平面和第三个平面相交，那么交线平行；

一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面。

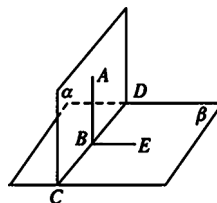
2 面面垂直

(1) 判定： $a \perp \beta, a \subset \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta$

(2) 性质：

$$1, \alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, a \perp l \Rightarrow a \perp \beta$$

$$2, \begin{cases} \alpha \perp \beta, P \in \alpha \\ P \in a, a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \subset \alpha$$



3、二面角

定义：平面与平面构成的角

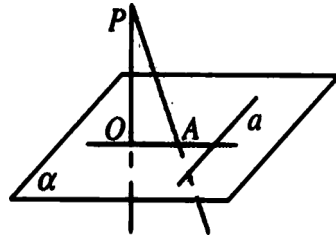
二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别做垂直于棱的两条射线，这两条射线所构成的角，

五、空间向量

这一部分内容可以参照第八章平面向量的内容

六、三垂线定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它和这条直线垂直。

三垂线逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和斜线在平面内的射影垂直。



例题1 在直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中， $AB=AC=1$

$BC=\sqrt{2}$, $AA'=2$, 则二面角 $C'-AB-C$ 的正切值是 () 【2018年真题】

- A 1 B 2
C 3 D 4

【答案】B

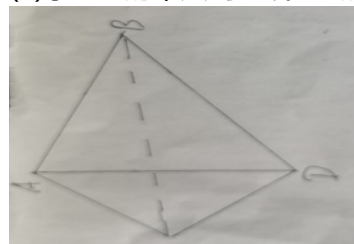
【解析】连接 AC' , $\angle C'AC$ 就是二面角

$$\tan \angle C'AC = 2$$

例题2 正四面体 $ABCD$ 中， $AB=1$

(1)证明； $AD \perp BC$

(2)求 AD 的中点到直线 BC 的距离 【2018年真题】



【解析】(1) 证明；过点 A 作底面 BCD 的垂线，垂足 O
连接 DO 延长与 BC 交于点 E

$$\therefore DE \perp BC$$

又 $\because DE$ 是 AD 在底面 BCD 上的射影

$$\therefore AD \perp BC$$

(2) 设中点是 F ，连接 FC, FB , 三角形 BFC 是等腰三角形

作 FH 垂直于 BC

$$BF = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FH = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例題 3 正方體 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E, F 是 $AD, D'D$ 的中點, 則直線 EF 與 BD' 所成角的正弦值是

【2016 年真題】

$$A; \frac{\sqrt{3}}{3}; B; \frac{\sqrt{2}}{2}; C; \frac{\sqrt{6}}{3}; D; \frac{\sqrt{6}}{2}$$

【答案】A

【解析】連接

$AD', AD' \parallel EF$

$$\sin \angle AD'B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

例題 4 四棱錐 $P-ABCD$ 的底面是矩形, 且 $AB=4, BC=3, PD$ 垂直於底面 $ABCD, PD=5$, 則 PB 與底面所成角為

【2014 年真題】

- A 30 B 45
C 60 D 75

【答案】B

【解析】連接 BD , $BD = \sqrt{9+16} = 5$ 所以是 45 度

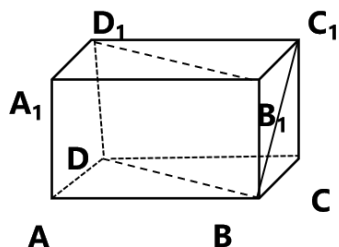
例題 5: 對於任意的直線 l 與平面 α , 在平面 α 內必有直線 m , 使 m 與 l ()

- A. 平行
B. 相交
C. 垂直
D. 互為異面直線

【答案】C

【解析】根據直線與平面平行和垂直的判定定理

例題 6: 在長方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2, AA_1=1$, 則 BC_1 與平面 BB_1DD_1 所成角的正弦值為 ()



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

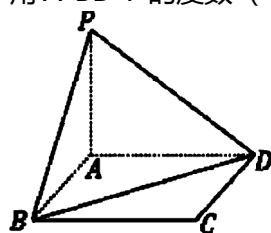
过点C作 B_1D_1 的垂线CE

$$\sin 45 = \frac{CE}{2} \Rightarrow CE = \sqrt{2}$$

$$BC_1 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{在}\triangle BC_1E\text{中}, \sin \angle C_1BE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

例题7: 如图所示, 在矩形ABCD中, $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$, $PA \perp$ 平面ABCD, $PA=3$, 求二面角A-BD-P的度数 ()



【答案】 60°

【解析】

过点P作 $PE \perp BD$, 连接AE

$$BD = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow \angle ADB = 30^\circ$$

$$\text{在}\triangle ADE\text{中}, AE = \sqrt{3}$$

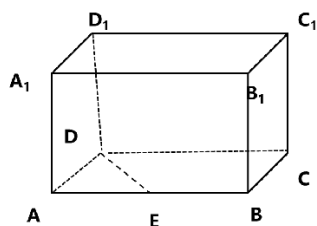
$$\tan \angle PEA = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle PEA = 60^\circ$$

例题8: 在长方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中, $AD=AA_1=1$, $AB=2$, E为AB的中点.

(1)求点C₁到平面DD₁E的距离

(2)求点C₁到直线DE的距离

(3)求直线BB₁与DE的距离



【答案】 (1) $\sqrt{2}$;(2) $\sqrt{3}$;(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

$$(1) 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$(2) x = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$(3) \sin 45 = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例题 9: 已知正六棱锥的高和底的边长都为 a

(1) 求对角面的面积, 全面积和体积

(2) 求则棱与底面所成的角, 则面与底面所成的角

【解析】(1) 棱长为; $\sqrt{2}a$

对角面的底边长为; $\sqrt{3}a$

对角面的高为; $\sqrt{2a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

对角面的面积是; $\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a \times \sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$

全面积是;

$$6 \times \frac{aa \sin 60}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4}a^2 \\ = \frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$$

体积是;

$$\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{aa \sin 60}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

(2) 则棱与底面所成的角;

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

则面与底面所成的角;

$$\tan \beta = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

例题 10: 直线 a 平行于平面 α , 直线 b 平行于平面 β , 那么 a, b 的位置关系是()

- A. 平行
- B. 相交
- C. 异面
- D. 可能平行, 可能相交, 也可能异面

【答案】D

【解析】根据直线与平面的位置关系可以判定三种情况都有可能。

例题 11: 直线 a 垂直于直线 b , 直线 $b \parallel$ 平面 M , 则()

- A. a 平行 M
- B. a 属于 M

- C. a 与 M 相交
 D. 上面三种情况都有可能

【答案】D

【解析】根据直线与平面的位置关系可以判定三种情况都有可能。

例题 12: 下面命题正确的是()

- A. 垂直于同一条直线的两条直线平行
 B. 若一条直线与两条平行线中的一条相交, 则它与另一条也相交
 C. 若一条直线与两条平行线中的一条垂直, 则它与另一条也垂直
 D. 一条直线最多与两条异面直线中的一条相交。

【答案】C

【解析】根据直线与直线的位置关系可以判断。

例题 13: 若直线 a 垂直于平面 α , 直线 b 属于 α , 则 a 与 b 的位置关系是

【答案】垂直

【解析】如果一条直线垂直于一个平面, 那么这条直线垂直于这个平面内的所有直线

例题 14: 若直线 a 平行于直线 b , 直线 a 垂直于平面 α , 则 b 与 α 的位置关系是

【答案】垂直

【解析】直线与平面垂直的性质定理

例题: 已知 a, b, c 是直线, α, β 是平面, 下列条件中

能得出 $a \perp \alpha$ 的是()

- (A) $a \perp b, a \perp c (b, c \subset \alpha)$
 (B) $a \perp b, b // \alpha$
 (C) $\alpha \perp \beta, a // \beta$
 (D) $a // b, b \perp \alpha$

【答案】D

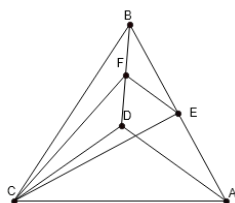
【解析】根据直线与平面垂直的判定定理

例题: 在四面体 $ABCD$ 中, $CB = CD, AD \perp BD$,

且 E, F 分别是 AB, BD 的中点,

求证(1) 直线 $EF //$ 面 ACD

(2) 面 $EFC \perp$ 面 BCD



【解析】证明：(1) E, F分别为AB, BD的中点

$$\left. \begin{array}{l} EF // AD \\ \Rightarrow AD \subset \text{面} ACD \\ EF \not\subset \text{面} ACD \end{array} \right\} \Rightarrow EF // \text{面} ACD.$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} EF // AD \\ AD \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow EF \perp BD$$

$$\left. \begin{array}{l} CD = CB \\ F \text{为} BD \text{的中点} \end{array} \right\} \Rightarrow CF \perp BD$$

$$EF \cap CF = F$$

综上： $\Rightarrow BD \perp \text{面} EFC$ 又 $BD \subset \text{面} BCD$

所以面 $EFC \perp \text{面} BCD$