



绝密★启用前

2015 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分。考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

7. $\int (x^{-2} + \sin x)dx =$

A. $-2x^{-1} + \cos x + C$

B. $-2x^{-3} + \cos x + C$

C. $-\frac{x^{-3}}{3} - \cos x + C$

D. $-x^{-1} - \cos x + C$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)dt$, 则 $f''(x) =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

9. 设二元函数 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. yx^{y-1}

B. yx^{y+1}

C. $x^y \ln x$

D. x^y

10. 设二元函数 $z = \cos(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

A. $y^2 \sin(xy)$

B. $y^2 \cos(xy)$

C. $-y^2 \sin(xy)$

D. $-y^2 \cos(xy)$

第 II 卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$ _____.

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} =$ _____.

13. 设函数 $y = \ln(4x - x^2)$, 则 $y'(1) =$ _____.

14. 设函数 $y = x + \sin x$, 则 $dy =$ _____.

15. 设函数 $y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x}$, 则 $y'' =$ _____.

16. 若 $\int f(x)dx = \cos(\ln x) + C$, 则 $f(x) =$ _____.

17. $\int_{-1}^1 x |x| dx =$ _____.

18. $\int d(x \ln x) =$ _____.

19. 由曲线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的平面有界图形的面积 $S =$ _____.

20. 设二元函数 $z = e^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$.

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = \cos(x^2 + 1)$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{x}{4 + x^2} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^4 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 1. \end{cases}$

25. (本题满分 8 分)

已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^x f(t)e^{-t} dt = x$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

26. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 判断曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性.

27. (本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

28. (本题满分 10 分)

从装有 2 个白球, 3 个黑球的袋中任取 3 个球, 记取出白球的个数为 X .

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了极限的计算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{-1+1}{(-1)^2+1} = 0$.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的比较的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$, 故 $\sin 3x$ 是 $2x$ 的同阶但不等价无穷小量.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分段函数的极限的知识点.

【应试指导】 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 故 $f(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无极限.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了导数的四则运算法则的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$, 则 $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \cdot xe^{\frac{x}{2}} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$.

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x^4 - 4x$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$. 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1, +\infty)$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 令 $t = 3x$, 则 $dx = \frac{1}{3}dt$, $t \in [-3, 3]$, 故 $\int_{-1}^1 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t)dt$.

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int (x^{-2} + \sin x)dx = \int x^{-2}dx + \int \sin x dx = -x^{-1} - \cos x + C$ (C 为任意常数).

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】 $f(x) = \int_0^x (t-1)dt$, 则 $f'(x) = x-1$, 故 $f''(x) = 1$.

9. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了高阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = \cos(xy)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin(xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy)$.

二、填空题

11. 【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了极限的计算的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小量, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

- 12.【答案】 $e^{-\frac{2}{3}}$
 【考情点拨】 本题考查了 重要极限的 应用的 知识点.
 【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{(-\frac{2}{3})} = e^{-\frac{2}{3}}.$
- 13.【答案】 $\frac{2}{3}$
 【考情点拨】 本题考查了 复合函数的导数的 知识点.
 【应试指导】 $y = \ln(4x - x^2)$, 则 $y' = \frac{4-2x}{4x-x^2}$, 故 $y'(1) = \frac{2}{3}.$

- 14.【答案】 $(1 + \cos x)dx$
 【考情点拨】 本题考查了 微分的 知识点.
 【应试指导】 $y = x + \sin x, y' = 1 + \cos x$, 故 $dy = (1 + \cos x)dx.$
- 15.【答案】 $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} + e^{-x}$
 【考情点拨】 本题考查了 高阶导数的 知识点.
 【应试指导】 $y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x}$, 则 $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - e^{-x}$, 故 $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} + e^{-x}.$

- 16.【答案】 $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$
 【考情点拨】 本题考查了 不定积分的 知识点.
 【应试指导】 $f(x) = [\cos(\ln x) + C]' = -\frac{1}{x}\sin(\ln x).$
- 17.【答案】 0
 【考情点拨】 本题考查了 定积分的性质的 知识点.
 【应试指导】 因为函数 $f(x) = x|x|$ 在 $[-1, 1]$ 上是连续的奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x|x| dx = 0.$

- 18.【答案】 $x \ln x + C$
 【考情点拨】 本题考查了 不定积分的性质的 知识点.
 【应试指导】 $\int d(x \ln x) = x \ln x + C (C \text{ 为任意常数}).$
- 19.【答案】 $\frac{1}{3}$
 【考情点拨】 本题考查了 定积分的 应用的 知识点.
 【应试指导】 由题意得, $S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

- 20.【答案】 $-e$
 【考情点拨】 本题考查了 偏导数的 知识点.
 【应试指导】 $z = e^{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}} = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = -e.$

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = e.$
22. $y' = [\cos(x^2 + 1)]' = -\sin(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = -2x \sin(x^2 + 1).$

23. $\int \frac{x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+x^2} d(4+x^2) = \frac{1}{2} \ln(4+x^2) + C.$
24. $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^4 \frac{1}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_1^4 = \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{2}.$

25. 等式两边对 x 求导, 得
 $f(x)e^{-x} = 1,$
 $f(x) = e^x.$
 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$

26. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1.$
 令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1.$
 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0.$
 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$, 单调减区间是 $(1, +\infty).$
 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 $f(1) = -1.$
- (2) 因为 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 是凸的.

27. $f'_x = x - y + 3, f'_y = -x + 2y.$
 由 $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ 解得 $x = -6, y = -3.$
 $f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{xy}(x, y) = -1, f''_{yy}(x, y) = 2.$
 $A = f''_{xx}(-6, -3) = 1, B = f''_{xy}(-6, -3) = -1, C = f''_{yy}(-6, -3) = 2.$
 $B^2 - AC = -1 < 0, A > 0,$
 故 $f(x, y)$ 在点 $(-6, -3)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(-6, -3) = -9.$

28. (1) X 可能的取值为 0, 1, 2.
 $P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = 0.1,$
 $P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = 0.6,$
 $P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = 0.3,$
 因此 X 的概率分布为
- | | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| X | 0 | 1 | 2 |
| P | 0.1 | 0.6 | 0.3 |
- (2) $E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2.$