

# 高等数学(二)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 总 分 | 统分人签字 |
|-----|---|---|---|-----|-------|
| 分 数 |   |   |   |     |       |

## 第 I 卷 (选择题, 共 40 分)

| 得 分 | 评卷人 |
|-----|-----|
|     |     |

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} =$  【    】

A. e                      B. 2                      C. 1                      D. 0

2. 若  $y = 1 + \cos x$ , 则  $dy =$  【    】

A.  $(1 + \sin x)dx$       B.  $(1 - \sin x)dx$       C.  $\sin x dx$               D.  $-\sin x dx$

3. 若函数  $f(x) = 5^x$ , 则  $f'(x) =$  【    】

A.  $5^{x-1}$                   B.  $x5^{x-1}$                   C.  $5^x \ln 5$                   D.  $5^x$

4. 曲线  $y = x^3 + 2x$  在点(1,3) 处的法线方程是 【    】

A.  $5x + y - 8 = 0$                   B.  $5x - y - 2 = 0$

C.  $x + 5y - 16 = 0$                   D.  $x - 5y + 14 = 0$

5.  $\int \frac{1}{2-x} dx =$  【    】

A.  $\ln |2-x| + C$                   B.  $-\ln |2-x| + C$

C.  $-\frac{1}{(2-x)^2} + C$                   D.  $\frac{1}{(2-x)^2} + C$

6.  $\int f'(2x) dx =$  【    】

A.  $\frac{1}{2} f(2x) + C$       B.  $f(2x) + C$                   C.  $2f(2x) + C$                   D.  $\frac{1}{2} f(x) + C$

7. 若  $f(x)$  为连续的奇函数, 则  $\int_{-1}^1 f(x) dx =$  【 】

A. 0

B. 2

C.  $2f(-1)$

D.  $2f(1)$

8. 若二元函数  $z = x^2y + 3x + 2y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  【 】

A.  $2xy + 3 + 2y$

B.  $xy + 3 + 2y$

C.  $2xy + 3$

D.  $xy + 3$

9. 设区域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ , 则  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为

【 】

A.  $\frac{\pi}{5}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\pi$

10. 设  $A, B$  为两个随机事件, 且相互独立,  $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4$ , 则  $P(A - B) =$  【 】

A. 0.24

B. 0.36

C. 0.4

D. 0.6

## 第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

|     |     |
|-----|-----|
| 得 分 | 评卷人 |
|     |     |

### 二、填空题 (11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 曲线  $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$  的拐点为\_\_\_\_\_.

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} =$ \_\_\_\_\_.

13. 若函数  $f(x) = x - \arctan x$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_.

14. 若  $y = e^{2x}$ , 则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

15. 设  $f(x) = x^{2x}$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_.

16.  $\int (2x + 3) dx =$ \_\_\_\_\_.

17.  $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx =$ \_\_\_\_\_.

18.  $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx =$ \_\_\_\_\_.

19.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ \_\_\_\_\_.

20. 若二元函数  $z = x^2y^2$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ \_\_\_\_\_.

|     |     |
|-----|-----|
| 得 分 | 评卷人 |
|     |     |

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sin x}{x}, & x < 0, \\ 3x + a, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 求  $a$ .

22. (本题满分 8 分)

求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$ .

23. (本题满分 8 分)

设函数  $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$ , 求  $f''(0)$ .

24. (本题满分 8 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}.$$

25. (本题满分 8 分)

求  $\int x \cos x dx$ .

26. (本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$  的极值.

27. (本题满分 10 分)

盒子中有 5 个产品, 其中恰有 3 个合格品. 从盒子中任取 2 个, 记  $X$  为取出的合格品个数. 求

(1)  $X$  的概率分布;

(2)  $EX$ .

28. (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = x^3 + y^3$  在条件  $x^2 + 2y^2 = 1$  下的最值.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了极限的运算的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数微分的知识点.

【应试指导】  $y' = -\sin x, dy = -\sin x dx.$

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的求导公式的知识点.

【应试指导】  $f(x) = 5^x$ , 则  $f'(x) = 5^x \ln 5.$

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了法线方程的知识点.

【应试指导】  $y' = 3x^2 + 2, y' \Big|_{x=1} = 5$ , 则法线斜率  $k = -\frac{1}{5}$ , 则法线方程为  $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$ , 即  $x + 5y - 16 = 0.$

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】  $\int \frac{1}{2-x} dx = -\int \frac{1}{2-x} d(2-x) = -\ln |2-x| + C.$

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】  $\int f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C.$

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 因为  $f(x)$  是连续的奇函数, 故  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】  $z = x^2 y + 3x + 2y$ , 故  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3.$

9. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了旋转体的体积的知识点.

【应试指导】  $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$

10. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了独立事件的知识点.

【应试指导】 因  $A, B$  相互独立, 故  $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.6 - 0.6 \times 0.4 = 0.36.$

### 二、填空题

11. 【答案】  $(2, -6)$

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】  $y' = 3x^2 - 12x + 3, y'' = 6x - 12$ , 令  $y'' = 0$ , 则  $x = 2$ , 此时  $y = -6$ , 故拐点为  $(2, -6).$

12. 【答案】  $e^{-3}$

【考情点拨】 本题考查了  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} = e^{-3}.$

13. 【答案】  $\frac{x^2}{1+x^2}$

【考情点拨】 本题考查了导数的求导公式的知识点.

【应试指导】  $f(x) = x - \arctan x$ , 则  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$

14. 【答案】  $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】  $y = e^{2x}, y' = 2e^{2x}$ , 则  $dy = 2e^{2x} dx.$

15. 【答案】  $2x^{2x}(\ln x + 1)$

【考情点拨】 本题考查了对数求导法的知识点.

【应试指导】  $y = x^{2x}$ , 两边取对数得  $\ln y = 2x \ln x$ , 两边同时对  $x$  求导得  $\frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2$ , 故  $y' = y(2 \ln x + 2) = 2x^{2x}(\ln x + 1).$

16. 【答案】  $x^2 + 3x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】  $\int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C.$

17. 【答案】  $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】  $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \left( \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$

18. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】  $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2.$

19. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了无穷积分的知识点.

【应试指导】  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$



20.【答案】  $4xy$

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】  $z = x^2y^2$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$ .

### 三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3\sin x}{x} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a,$$

且  $f(0) = a$ ,

$\therefore f(x)$  在  $x = 0$  处连续,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

$$\therefore a = 3.$$

$$\begin{aligned} 22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$23. f(x) = 2x + \ln(3x + 2),$$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{3x + 2},$$

$$f''(x) = -\frac{9}{(3x + 2)^2},$$

$$\text{故 } f''(0) = -\frac{9}{4}.$$

$$\begin{aligned} 24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1 - \cos 3x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \int x \cos x dx &= \int x d \sin x \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

$$26. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5,$$

则  $f'(x) = x^2 - x$ , 令  $f'(x) = 0$ , 则  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ,  
当  $x < 0$  或  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时  $f(x)$  为单调增加函数;

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时  $f(x)$  为单调减少函数.

故当  $x = 0$  时,  $f(x)$  取极大值, 极大值  $f(0) = 5$ ;

当  $x = 1$  时,  $f(x)$  取极小值, 极小值  $f(1) = \frac{29}{6}$ .

27. (1)  $X$  可能的取值为  $0, 1, 2$ ,

$$P\{X = 0\} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

则  $X$  的分布律为

|     |                |               |                |
|-----|----------------|---------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1             | 2              |
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |

$$(2) EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

28. 作拉格朗日函数  $L(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$ ,

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 3y^2 + 4\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

解得驻点  $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$  和  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,

$$\text{且 } f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}.$$

故函数  $f(x, y)$  在条件  $x^2 + 2y^2 = 1$  下的最小值为  $-\frac{1}{3}$ , 最大值为  $\frac{1}{3}$ .