

第十四章 导数

本章要求

- (1) 了解函数极限的概念, 了解连续的意义
- (2) 理解导数的概念和几何意义
- (3) 掌握基本的求导公式, 法则。
- (4) 理解极值和最值的概念, 会求极值和最值
- (5) 会求曲线的切线方程

内容提要

一、极限的概念 (了解)

二、连续的概念 (了解)

三、导数的概念 (了解)

四、导数的几何意义

函数在某点导数的几何意义就是过该点所对应曲线上那点的切线的斜率。

五、导数的基本公式

$$(c)' = 0; (\cos x)' = -\sin x$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}; (e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

六、导数的运算法则

$$1; (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2; (uv)' = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow (cu)' = cu'$$

$$3; \left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - u'v}{u^2}$$

七、利用导数判断函数的单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$

八、函数的极值

1 极值的概念 (利用图形理解)

极小值点 $\rightarrow$ 极小值

极大值点 $\rightarrow$ 极大值

2 极值的求法

(1) 求定义域

(2) 求一阶导数=0的点(驻点)和不可导的点

(3) 根据驻点左右两端一阶导数的符号判断

异号 $\rightarrow$ 是极值点 (左+右-; 极大值; 左-右+; 极小值)

同号 $\rightarrow$ 不是极值点

九、函数在闭区间上最值的求法

1 求函数在开区间上的极值

2 把极值和区间的两个端点对应的值比较。

例题1 曲线 $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$ 在点 (0,0) 处的切线方程是 【2018年真题】

【答案】 $y = -x$

【解析】

$$y' = 2x - e^x$$

$$\Rightarrow y' \Big|_{x=0} = -1$$

$$\Rightarrow y = -x$$

例题2 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间

(2) 求零点的个数

【2018年真题】

【答案】

(1) 定义域 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$(x-1)(3x+5) = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

$$\left(-\frac{5}{3}, 1\right) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \downarrow$$

$$(1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

(2)

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) > 0; f(1) < 0$$

有3个零点

例题3 设直线 $y = x + 1$ 是曲线 $y = x^3 + 3x^2 + 4x + a$ 是切线, 求切点坐标和 a 的值

【2017年真题】

【答案】

$$y = x + 1 \Rightarrow k = 1$$

$$y' = 3x^2 + 6x + 4 = 1$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y - b = x + 1 \Rightarrow b = 0$$

切点 $(-1, 0)$

$$\text{代入曲线得: } 0 = -1 + 3 - 4 + a$$

$$\Rightarrow a = 2$$

例题4 曲线 $y = x^3 - 4x + 2$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程是 【2016年真题】

A. $x - y - 2 = 0$

B. $x - y = 0$

C. $x+y=0$ D. $x+y-2=0$

【答案】 C

【解析】

$$y' = 3x^2 - 4 \Rightarrow y' \Big|_{x=1} = -1 = k$$

$$y+1 = -(x-1) = -x+1$$

$$x+y=0$$

例题 5 已知函数

$$f(x) = 2x^3 + 3mx^2 - 36x + m$$

$$\text{且 } f'(-1) = -36$$

(1) 求 m

(2) 求 f(x) 的单调区间

【2016 年真题】

【答案】 (1)

$$f'(x) = 6x^2 + 6mx - 36$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 6 - 6m - 36 = -36$$

$$\Rightarrow m = 1$$

(2)

定义域 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$(-\infty, -3) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

$$(-3, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \downarrow$$

$$(2, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

例题 6 曲线 $y = x^2 + 3x + 4$ 在点 $(-1, 2)$ 处的切线方程是 【2015 年真题】

【答案】 $y = x + 3$

【解析】

$$y' = 2x + 3 \Rightarrow y' \Big|_{x=-1} = 1$$

$$y - 2 = x + 1$$

$$y = x + 3$$

例题 7 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1

(1) 求 a, b

(2) 求 f(x) 的单调区间

【2015 年真题】

【答案】 (1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax = 0$$

$$3 + 2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f(1) = 1 - \frac{3}{2} + b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

$$(0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \downarrow$$

$$(1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow$$

例题 8 曲线 $y = x^3 - 2x$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程是 【2014 年真题】

【答案】 $y = x - 2$

【解析】

$$y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y' \Big|_{x=1} = 1$$

$$y + 1 = x - 1$$

$$y = x - 2$$

例题 9 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

(1) 求 $f(x)$ 的导数

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 的最大值和最小值

【2014 年真题】

【答案】 (1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = -27 \\ f(1) = -11; f(4) = -20 \end{cases}$$

$$f(1) = -11; f(4) = -20$$

最大值是 -11, 最小值是 -27

例题 10 在边长为 a 的正方形中作一矩形, 使得矩形的顶点分别在正方形的四条边上, 而它的边与正方形的对角线平行, 问如何作法才能使得这个矩形的面积最大?

【答案】

以正方形的左下顶点为原点建立直接坐标系

设矩形在 x 轴上的交点为 x , 矩形的面积为 S

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{2}x\sqrt{2}(a-x) \\
 &= 2x(a-x) \\
 S' &= 2a-4x=0 \\
 \Rightarrow x &= \frac{a}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

例题 11 某工厂每月生产 x 台游戏机的收入为

$$R(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206 \text{ (百元)}$$

成本函数为 $C(x) = 50x + 100$ (百元)

当每月生产多少台时，获利润最大？最大利润是多少？

【答案】

$$\begin{aligned}
 L(x) &= R(x) - C(x) \\
 &= -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206 - 50x - 100 \\
 &= -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306 \\
 L'(x) &= -\frac{8}{9}x + 80 = 0 \Rightarrow x = 90 \\
 L(90) &= 3294
 \end{aligned}$$

例题 12 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间

(2) 求 $f(x)$ 的极值

【答案】 (1)

定义域是 R

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \\
 (-\infty, 0) &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \downarrow \\
 (0, +\infty) &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \\
 (-\infty, 0) &\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \downarrow \\
 (0, +\infty) &\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \uparrow \\
 \text{所以 } x=0 &\text{ 是极小点} \\
 \text{极小值是 } &= 0
 \end{aligned}$$

例题 13 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ 上的一点 $P(2, 8/3)$

(1) 求 P 处的切线斜率

(2) 求 P 处的切线方程

【答案】

$$(1) f'(x) = x^2 \Rightarrow x^2 \Big|_{x=2} = 4 = k$$

$$(2) y - \frac{8}{3} = 4(x - 2)$$

例题 14 分别求曲线 $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$

上满足下列条件的点

- (1) 过这些点的切线与 x 轴平行
- (2) 过这些点的切线与直线 $y=x$ 平行

【答案】

$$f'(x) = -6x + 2$$

$$(1) k = 0 \Rightarrow -6x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 4\frac{1}{3}; \left(\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\right)$$

$$(2) k = 1 \Rightarrow -6x + 2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{51}{12}; \left(\frac{1}{6}, \frac{51}{12}\right)$$

例题 15 设函数 $f(x) = ax + \frac{4}{x}$, 曲线 $f(x)$ 在点 $(1, a+4)$ 处切线的斜率是 -3

- (1) 求 a
- (2) 函数在区间 $[1, 8]$ 上的最大值和最小值

【答案】

$$(1) f'(x) = a - \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(1) = a - 4 = -3$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$(2) f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f(2) = 4; f(1) = 5; f(8) = 8\frac{1}{2}$$

最大值是 $8\frac{1}{2}$; 最小值是 4

例题 16 在边长为 a 的正方形铁皮的四角切去相等的正方形, 再将它折起, 做成一个无盖且底面为正方形, 高为切去的正方形边长的箱子, 箱子底边多长时, 箱子的体积最大?

【答案】 设被切去的正方形角的边长为 x, 箱子的体积是 V

$$V = x(a - 2x)^2$$

$$V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} (\text{舍去}) \\ x = \frac{a}{6} \end{cases}$$

底边长为 $a - 2 \times \frac{a}{6} = \frac{2a}{3}$, 体积最大

例题 17 圆柱的体积一定时，它的高和底面半径是多少时，其表面积最小？

【答案】设圆柱的体积是 V ，底面半径为 r ，高为 h ，表面积 S

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + 2 \frac{V}{r} \Rightarrow S' = 4\pi r - 2 \frac{V}{r^2} = 0 \\ &\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r \end{aligned}$$

例题 18 函数 $y = x^3 + x$

- A 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增
- B 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减
- C 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增；在 $(0, +\infty)$ 单调递减
- D 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减；在 $(0, +\infty)$ 单调递增

【答案】A

【解析】 $y' = 3x^2 + 1 > 0$