



绝密★启用前

2019 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题, 共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ 【 】

- A.
- $-e^2$
- B.
- $-e$
- C.
- e
- D.
- e^2

2. 设函数 $y = \arcsin x$, 则 $y' =$ 【 】

- A.
- $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- B.
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- C.
- $-\frac{1}{1+x^2}$
- D.
- $\frac{1}{1+x^2}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, $f'(x) > 0$, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 零点的个数为 【 】

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4. 设函数 $y = x^3 + e^x$, 则 $y^{(4)} =$ 【 】

- A. 0 B.
- e^x
- C.
- $2 + e^x$
- D.
- $6 + e^x$

5. $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx =$ 【 】

- A.
- $\arctan x$
- B.
- $\operatorname{arccot} x$
- C.
- $\frac{1}{1+x^2}$
- D. 0

6. $\int \cos 2x dx =$ 【 】

- A.
- $\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- B.
- $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- C.
- $\frac{1}{2} \cos 2x + C$
- D.
- $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$

7. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx =$ 【 】

- A.
- -10
- B.
- -8
- C. 8 D. 10

8. 设函数 $z = (x-y)^{10}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

- A.
- $(x-y)^{10}$
- B.
- $-(x-y)^{10}$
- C.
- $10(x-y)^9$
- D.
- $-10(x-y)^9$

9. 设函数 $z = 2(x-y) - x^2 - y^2$, 则其极值点为 【 】

- A. (0, 0) B. (-1, 1) C. (1, 1) D. (1, -1)

10. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	$2a$	a	$3a$	$4a$

则 $a =$ 【 】

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 $3x$ 是等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$.

13. 设函数 $f(x) = \sqrt{x+x^2}$, 则 $f'(1) =$.

14. 设 x^2 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$.

15. 设函数 $y = \ln \sin x$, 则 $dy =$.

16. $\int \frac{1}{x^2} dx =$.

17. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$.

18. $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx =$.

19. 设函数 $z = \frac{e^y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$.

20. 设函数 $z = \sin x \cdot \ln y$, 则 $dz =$.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$.

22. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, 求 $f'(x)$.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

一个袋中有 10 个乒乓球,其中 7 个橙色,3 个白色,从中任取 2 个,设事件 A 为“所取的 2 个乒乓球颜色不同”,求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

26. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值,点 $(1, -1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点,求 a, b, c .

27. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 的导函数连续, 且 $f(1) = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 4$, 求 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$.

28. (本题满分 10 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 证明: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$.

2.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的导数公式的知识点.

【应试指导】 $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了零点存在定理的知识点.

【应试指导】 由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点, 且函数是单调函数, 故其在 (a, b) 上只有一个零点.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 + e^x, y'' = 6x + e^x, y''' = 6 + e^x, y^{(4)} = e^x$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+x^2}$.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分公式的知识点.

【应试指导】 $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^3 d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \Big|_0^1 = 10$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了偏导数的知识点.

【应试指导】 由偏导数公式可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 10(x-y)^9$.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数极值的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2-2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2-2y$, 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得驻点 $(1, -1)$, 而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, 故 $\Delta = 0 - (-2) \cdot (-2) = -4 < 0$, 因此 $(1, -1)$ 是函数的极值点.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 由概率分布的性质可知 $2a + a + 3a + 4a = 10a = 1, a = 0.1$.

二、填空题

11.【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的知识点.

【应试指导】 由题可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 3$.

12.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$.

13.【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【考情点拨】 本题考查了导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$, 因此 $f'(1) = \frac{1+2 \times 1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

14.【答案】 $2x$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的原函数的知识点.

【应试指导】 由题意可知 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 故 $f(x) = (\int f(x)dx)' = (x^2 + C)' = 2x$.

15.【答案】 $\cot x dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $dy = d(\ln \sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x dx$.

16.【答案】 $-\frac{1}{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

17.【答案】 $2\sin\sqrt{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos\sqrt{x} d\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x} + C$.

18.【答案】 4

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx = \int_{-1}^1 x \cos^2 x dx + 2x \Big|_{-1}^1 = 0 + 4 = 4$.

19.【答案】 $-\frac{e^y}{x^2}$

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^y}{x^2}$.

20.【答案】 $\cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = d(\sin x \cdot \ln y) = \ln y d(\sin x) + \sin x d(\ln y) = \cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}}$
 $= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}$
 $= \frac{1}{2}$.

22. $f'(x) = \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

23. 令 $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \cos t dt$,

$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cdot \cos t dt$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt$
 $= \tan t + C$,

而 $t = \arcsin x$, 故有

$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \tan t + C$
 $= \tan(\arcsin x) + C$.

24. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^3 x} d(\ln x)$
 $= -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_e^{+\infty}$
 $= \frac{1}{2}$.

25. A 为所取的 2 个乒乓球颜色不同, 即 A 表示所取的 2 个球中 1 个球是橙色, 一个球是白色,

故 $P(A) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$.

26. 易知 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$,

由于 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 则 $f'(2) = 12a + 4b + c = 0$,

点 $(1, -1)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 故有 $f(1) = -1, f''(1) = 0$,

即 $\begin{cases} a + b + c = -1, \\ 6a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 0$.

27. $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 x^2 df(x)$
 $= x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot 2x dx$
 $= f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx$
 $= 0 - 2 \times 4 = -8$.

28. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 故

$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2}$
 $= -1 + 1 = 0$.