



绝密★启用前

2020 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟.

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 统分人签字 |
|----|---|---|---|----|-------|
| 分数 |   |   |   |    |       |

## 第 I 卷(选择题,共 40 分)

| 得分 | 评卷人 |
|----|-----|
|    |     |

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} =$  【 】

- A.
- $e^{\frac{3}{2}}$
- B.
- $e^{\frac{2}{3}}$
- C.
- $e^{\frac{1}{6}}$
- D.
- $e^6$

2. 设函数  $y = x + 2\sin x$ , 则  $dy =$  【 】

- A.
- $(1 - 2\cos x)dx$
- B.
- $(1 + 2\cos x)dx$
- C.
- $(1 - \cos x)dx$
- D.
- $(1 + \cos x)dx$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$  【 】

- A.
- $\frac{3}{2}$
- B. 1 C. 2 D.
- $\frac{1}{2}$

4. 设函数  $f(x) = 3 + x^5$ , 则  $f'(x) =$  【 】

- A.
- $x^4$
- B.
- $1 + x^4$
- C.
- $\frac{1}{5}x^4$
- D.
- $5x^4$

5. 设函数  $f(x) = 2\ln x$ , 则  $f''(x) =$  【 】

- A.
- $\frac{2}{x^2}$
- B.
- $-\frac{2}{x^2}$
- C.
- $\frac{1}{x^2}$
- D.
- $-\frac{1}{x^2}$

6.  $\int_{-2}^2 (1+x)dx =$  【 】

- A. 4 B. 0 C. 2 D. -4

7.  $\int \frac{3}{x^5} dx =$  【 】

- A.
- $\frac{3}{4x^4} + C$
- B.
- $\frac{3}{5x^4} + C$
- C.
- $-\frac{3}{4x^4} + C$
- D.
- $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排,则 2 本英语书恰好相邻的概率为 【 】

- A.
- $\frac{2}{5}$
- B.
- $\frac{4}{5}$
- C.
- $\frac{3}{5}$
- D.
- $\frac{1}{2}$

9. 设函数  $z = x^2 - 4y^2$ , 则  $dz =$  【 】

- A.
- $x dx - 4y dy$
- B.
- $x dx - y dy$
- C.
- $2x dx - 4y dy$
- D.
- $2x dx - 8y dy$

10. 设函数  $z = x^3 + xy^2 + 3$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$  【 】

- A.
- $3x^2 + 2xy$
- B.
- $3x^2 + y^2$
- C.
- $2xy$
- D.
- $2y$

## 第 II 卷(非选择题,共 110 分)

| 得分 | 评卷人 |
|----|-----|
|    |     |

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 设函数  $y = e^{2x}$ , 则  $dy =$  .

12. 函数  $f(x) = x^3 - 6x$  的单调递减区间为 .

13. 若函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  .

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$  .

15.  $\int (3x + 2\sin x) dx =$  .

16. 曲线  $y = \arctan(3x + 1)$  在点  $(0, \frac{\pi}{4})$  处切线的斜率为 .

17.  $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' =$  .

18.  $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$  .

19. 区域  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$  的面积为 .

20. 方程  $y^3 + \ln y - x^2 = 0$  在点  $(1, 1)$  的某邻域确定隐函数  $y = y(x)$ , 则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$  .

|     |     |
|-----|-----|
| 得 分 | 评卷人 |
|     |     |

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算  $\int x \sin x dx$ .

22. (本题满分 8 分)

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$ .

23. (本题满分 8 分)

已知函数  $f(x) = e^x \cos x$ , 求  $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

24. (本题满分 8 分)

计算  $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$ .

25. (本题满分 8 分)

设  $D$  为曲线  $y = \sqrt{x}$ , 直线  $x = 4$ ,  $x$  轴围成的有界区域, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

26. (本题满分 10 分)

求函数  $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$  的极值.

27. (本题满分 10 分)

求曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  的凹凸区间与拐点.

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量  $X$  的概率分布为

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -1  | 0   | 2   |
| $P$ | $a$ | 0.5 | $b$ |

且  $E(X) = 0$ .

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 求  $E[X(X+1)]$ .

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{3}} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{3}}.$

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】  $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$ , 故  $dy = y'dx = (1+2\cos x)dx$ .

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}.$

4. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】  $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4.$

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶导函数的知识点.

【应试指导】  $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}, f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}.$

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了牛顿—莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】  $\int_{-2}^2 (1+x)dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^2 = 4.$

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】  $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C.$

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了随机事件的概率的知识点.

【应试指导】 2 本英语书恰好相邻的概率为  $\frac{A_1^1 \cdot A_2^2}{A_3^3} = \frac{2}{5}.$

9. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 易知  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -8y$ , 故  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy$ .

10. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的偏导数的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy.$

### 二、填空题

11. 【答案】  $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】  $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ , 故  $dy = y'dx = 2e^{2x} dx$ .

12. 【答案】  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 易知  $f'(x) = 3x^2 - 6$ , 令  $f'(x) < 0$ , 则有一  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ , 故  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

13. 【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了分段函数连续性的知识点.

【应试指导】 由于  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 故有  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 而  $f(0) = -2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$ , 因此  $a = -2$ .

14.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 \rightarrow 0$ , 故有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$ .

15.【答案】  $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】  $\int (3x + 2\sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$ .

16.【答案】  $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数切线的知识点.

【应试指导】  $y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$ , 故曲线在点  $(0, \frac{\pi}{4})$  处的切线斜率为  $y' \Big|_{x=0} =$

$$\frac{3}{1+(3x+1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}.$$

17.【答案】  $2\sin(4x^2)$

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】  $\left(\int_0^{2x} \sin t^2 dt\right)' = \sin(2x)^2 \cdot (2x)' = 2\sin(4x^2)$ .

18.【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】  $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$ .

19.【答案】  $\frac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的应用的知识点.

【应试指导】 区域  $D$  的面积为  $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$ .

20.【答案】  $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对  $x$  求导, 得  $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3 + 1}$ , 故有  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^3 + 1} \Big|_{x=1} =$

$$\frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}.$$

### 三、解答题

21.  $\int x \sin x dx = - \int x d(\cos x)$

$$= -(x \cos x - \int \cos x dx)$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

23.  $f'(x) = e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)'$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$= e^x (\cos x - \sin x),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

24.  $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1)$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1).$$

25. 区域  $D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$ ,

$$\text{故所求旋转体的体积} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy$$

$$= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{5}\pi.$$

26.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

得驻点为  $(1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$ .

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在  $(1, 0)$  点有极小值,  $z_{\text{极小值}} = -1$ ;

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$ , 故点  $(-1, 1)$  不是极值点;

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$ , 故点  $(-1, -1)$  不是极值点.

因此函数在  $(1, 0)$  点有极小值,  $z_{\text{极小值}} = -1$ .

27.  $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$

令  $y'' = 0$ , 得  $x = 1$ .

当  $x > 1$  时,  $y'' > 0$ , 故  $(1, +\infty)$  为曲线的凹区间;

当  $x < 1$  时,  $y'' < 0$ , 故  $(-\infty, 1)$  为曲线的凸区间;

函数的拐点为  $(1, 1)$ .

28. (1) 由概率的性质可知  $a + 0.5 + b = 1$ ,

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0,$$

$$\text{故有 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}.$$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2$$

$$= 1,$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$