



绝密★启用前

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$, 则 $m =$

【 】

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 设 $y = e^x + \cos x$, 则 $y' =$

【 】

A. $e^x + \cos x$

B. $e^x - \cos x$

C. $e^x - \sin x$

D. $e^x + \sin x$

3. 设 $y = x \tan x$, 则 $y' =$

【 】

A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

B. $\frac{x}{\cos^2 x}$

C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$, 则 $y'' =$

【 】

A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$

B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$

C. $\frac{1}{(1+x)^3}$

D. $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为

【 】

A. (0,0)

B. (0,1)

C. (-1,0)

D. (1,1)

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$, 则 $f(x) =$ 【 】
 A. $-\sin 2x$ B. $\sin 2x$
 C. $-2\sin 2x$ D. $2\sin 2x$
7. 设 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$, 则 $a =$ 【 】
 A. -2 B. -1
 C. 1 D. 2
8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】
 A. $-6y\cos(x - 3y^2)$ B. $-6y\sin(x - 3y^2)$
 C. $6y\cos(x - 3y^2)$ D. $6y\sin(x - 3y^2)$
9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】
 A. $xf''(x^2 + y)$ B. $2xf''(x^2 + y)$
 C. $yf''(x^2 + y)$ D. $2xyf''(x^2 + y)$
10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A + B) =$ 【 】
 A. 0.4 B. 0.5
 C. 0.7 D. 0.9

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$ _____.
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$ _____.
14. 设 $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $y'(1) =$ _____.
15. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$ _____.
16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的斜率为 _____.
17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$ _____.
18. $\int x(x^2 - 1) dx =$ _____.
19. $\int_0^1 (x + e^x) dx =$ _____.
20. 设函数 $f(x, y) = x + y$, 则 $f(x + y, x - y) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int (2\arcsin x + 1) dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数.

(1) 求 a ;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2.$

2. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^x + \cos x)' = (e^x)' + (\cos x)' = e^x - \sin x.$

3. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (x \tan x)' = \tan x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}.$

4. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = -\frac{1}{(1+x)^2}, y'' = -(-2) \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}.$

5. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了曲线拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2, y'' = 6x$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0, y = 1$, 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线的拐点为 $(0, 1)$.

6. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了原函数定义的知识点.

【应试指导】 由题可知 $f(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x.$

7. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了定积分的基本性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \int_{-a}^a x^2 dx + \int_{-a}^a x^3 dx = 2 \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{3}$, 因此 $a = 1$.

8. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x - 3y^2) \cdot (-6y) = -6y \cos(x - 3y^2).$

9. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了复合函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y) \cdot 2x = 2x f'(x^2 + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x f''(x^2 + y).$

10. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 事件 A 与 B 互斥, 故 $P(AB) = 0$, 因此 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.4 = 0.9$.

二、填空题

11. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考点点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.$

12. 【答案】 e

【考点点拨】 本题考查了分段函数的连续性的知识点.

【应试指导】 由于函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $f(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

13. 【答案】 2

【考点点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 2.$

14.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】 $y' = -\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 故 $y'(1) = 0$.

15.【答案】 $-\frac{2}{x^3} + 1$

【考情点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】 令 $t = \frac{1}{x}$, 则有 $f(t) = \frac{1}{t^2} + t + 1$, 即 $f(x) = \frac{1}{x^2} + x + 1$, 因此 $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$.

16.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了曲线法线的知识点.

【应试指导】 $y' = 6x^2 + 1$, 故 $y'(0) = 1$, 因此曲线在点 $(0, -1)$ 处的法线的斜率为 -1.

17.【答案】 $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$.

18.【答案】 $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int x(x^2 - 1) dx = \int (x^3 - x) dx = \int x^3 dx - \int x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$.

19.【答案】 $e - \frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 (x + e^x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + e^x\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$.

20.【答案】 $2x$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的知识点.

【应试指导】 $f(x+y, x-y) = x+y+x-y = 2x$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x}$
 $= -\frac{1}{2}$.

22. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

23. $\int (2\arcsin x + 1) dx = 2x\arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) + x$
 $= 2x\arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x$
 $= 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C$.

24. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + t} dt$
 $= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$
 $= 2\ln(t+1) \Big|_1^2$
 $= 2\ln \frac{3}{2}$.

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以 $a = 0.1$.

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 \\ = 1.7.$$

26. 方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 由 $\begin{cases} x + y - 4 = 0, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(1, 3), (3, 1)$.

$$(1) D \text{ 的面积 } S = \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x} \right) dx \\ = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x \right) \Big|_1^3 \\ = 4 - 3\ln 3.$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_1^3 \left[(4-x)^2 - \left(\frac{3}{x} \right)^2 \right] dx \\ = \pi \left[-\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x} \right] \Big|_1^3 \\ = \frac{8\pi}{3}.$$

28. 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$,

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.