

2023 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第I卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = (\quad)$
A. -1 B. 0
C. $\frac{1}{2}$ D. 1
2. 设函数 $f(x) = x^3 + 5\sin x$, 则 $f'(0) = (\quad)$
A. 5 B. 3
C. 1 D. 0
3. 设函数 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) = (\quad)$
A. x B. $x - 1$
C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} - 1$
4. 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3$ 的单调递减区间是($\quad$)
A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 3)$
5. $\int x^{\frac{1}{3}} dx = (\quad)$
A. $x^{\frac{4}{3}} + C$ B. $\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$
C. $x^{\frac{5}{3}} + C$ D. $x^{\frac{1}{3}} + C$

6. 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = (\quad)$
A. -2 B. 0 C. 1 D. 2
7. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$, 则 $f(x) = (\quad)$
A. e^x B. $e^x - 1$
C. $e^x + 1$ D. $x + 1$
8. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz = (\quad)$
A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$ B. $e^x dx + e^y dy$
C. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$ D. $e^y dx + e^x dy$
9. 设 $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\quad)$
A. $\frac{x}{2}$ B. 0
C. $\frac{y}{2}$ D. $x + y$
10. 投控一枚均匀硬币 5 次, 其中恰有 3 次正面朝上的概率是($\quad$)
A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{16}$

第II卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}.$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$
13. 设函数 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
14. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 则 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}.$
15. 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
16. 曲线 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

17. $\int \frac{x}{x^2+4} dx =$ _____.

18. 由曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的平面图形的面积为_____.

19. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$ _____.

20. 函数 $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 的驻点坐标为_____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

22.(本题满分 8 分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,求 dy.

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$.

25.(本题满分 8 分)

盒中有 5 个球,其中 3 个白球,2 个黑球,从中随机一次抽取 3 个球,用 X 表示抽取到的白球的个数.

- (1)求随机变量 X 的概率分布;
- (2)求 X 的数学期望 $E(X)$.

弥 封 线 内 不 要 答 题

26.(本题满分 10 分)

要做一个容积为 V 立方米的密闭圆柱形容器,两底面材料的价格为每平方米 a 元,侧面材料的价格为每平方米 b 元,问圆柱形容器的底面半径与高的比等于多少时,造价最低?

27.(本题满分 10 分)

证明:当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

28.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数.求在条件 $x+y=c$ 下 $f(x,y)$ 的最小值,其中 $x>0,y>0,c$ 为正常数.

2023 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(二)试题参考答案

一、选择题

- 1.D
- 2.A
- 3.D
- 4.D
- 5.B
- 6.C
- 7.A
- 8.C
- 9.B
- 10.D

二、填空题

11. $\frac{1}{4}$
12. e^2
13. 2^n
14. $\frac{3}{2}$
15. $(-2, -2\text{e}^{-2})$
16. $y = 0$
17. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$
18. $\frac{1}{3}$
19. $\frac{1}{2}$
20. $(1, 1)$

三、解答题

21.解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

22.解: $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})'$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

所以 $\text{d}y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\text{d}x.$

23.解: $\int x^2 \cos x \text{d}x = \int x^2 \text{d}\sin x$
 $= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \text{d}x$
 $= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \int \cos x \text{d}x)$
 $= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C.$

24.解: $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} \text{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \text{d}(1 - x^2)$
 $= -\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

25.解:(1) X 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P\{X = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

故 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

(2) $E(x) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.1 = 1.8.$

26.解: 设底面半径和高分别为 r, h . 则造价函数 $L = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh$, 且 $\pi r^2 h = V.$

将 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入 L 中, 得 $L = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}.$

令 $L' = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2} = 0$, 得 $2a\pi r^3 = bV,$

则有 $2a\pi r^3 = b\pi r^2 h$, 即 $2ar = bh$, 解得 $\frac{r}{h} = \frac{b}{2a}.$

由实际问题的意义知, 当底面半径与高的比为 $\frac{b}{2a}$ 时, 造价最低.

27.解: 令 $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 + x = \frac{x^2}{1 + x},$

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$. 因此, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为单调增函数.

故有 $f(x) \geq f(0) = 0$. 故当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$

28.解: 令 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - c),$

则 $\begin{cases} L_x = \frac{1}{2}nx^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_y = \frac{1}{2}ny^{n-1} + \lambda = \theta, \text{解得 } x = y = \frac{c}{2}. \\ L_\lambda = x + y - c = 0, \end{cases}$

由实际问题的意义知当 $x = y = \frac{c}{2}$ 时, $f(x, y)$ 取得最小值 $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{2}\right)^n + \left(\frac{c}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{c}{2}\right)^n.$

弥 封 线 内 不 要 答 题