

绝密★启用前

2025 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题, 共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题, 每小题 7 分, 共 84 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3 - 3\cos x$ 与 x^α 为同阶无穷小量, 则 $\alpha =$ []

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x+1} =$ []

- A. 2 B. 1
C. 0 D. -1

3. 设函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$, 则 $f'(0) =$ []

- A. 0 B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\sqrt{5}$ D. 5

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+4}-2}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $k =$ []

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. $\frac{7}{4}$

5. 设函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f''(0) =$ []

- A. -1 B. 0
C. $\frac{1}{2}$ D. 1

6. $\int \sin(x+1) dx =$

- A. $-\cos(x+1) + C$
C. $-\sin(x+1) + C$

- B. $\cos(x+1) + C$
D. $\sin(x+1) + C$

7. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx =$

- A. 0
C. 1

- B. $\ln 2$
D. $\ln 3$

8. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx =$

- A. $\frac{1}{4}$
C. 1

- B. $\frac{1}{2}$
D. 2

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt =$

- A. -2
C. 1

- B. 0
D. 2

10. 设随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	a	$3a$	a

则 $a =$

- A. 0.2
C. 0.4

- B. 0.3
D. 0.5

11. 曲线 $y = 3 \arctan x$ 的渐近线方程为

- A. $y = \pm 3$
C. $y = \pm \frac{3\pi}{2}$

- B. $y = 0$
D. $y = \pm 3\pi$

12. 甲、乙、丙、丁 4 名同学排成一列, 且甲、乙不相邻, 则不同的排法共有

- A. 24 种
C. 12 种

- B. 16 种
D. 8 种

第 II 卷(非选择题, 共 66 分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 曲线 $y = -2e^x + 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的方程为_____.

14. 函数 $f(x) = x^2 - \ln \sqrt{x}$ 的单调递减区间是_____.

15. 设 $z = 15 + x^2y + \cos y$, 则 $dz =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分15分)

已知函数 $z = x^y (x > 0)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

17. (本题满分15分)

计算曲线 $y = 4\sin x (\pi \leq x \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

18. (本题满分 15 分)

设 $0 < a \leq e$, 证明: $a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 由题可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^a} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-a} = \text{常数}$, 故 $2 - a = 0$, 即 $a = 2$.

2. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x+1} = \frac{\sin 0}{0+1} = 0$.

3. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 5})'}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 + 5}}}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}$, 故 $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{0 + 5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

4. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 由于函数在 $x = 0$ 处连续, 故有 $f(0) = k = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{7x+4}-2)(\sqrt{7x+4}+2)}{x(\sqrt{7x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x(\sqrt{7x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{7x+4}+2} = \frac{7}{4}$.

5. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了二阶导数的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 则 $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left[-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, 故 $f''(0) = -\frac{0}{(1+0)^{\frac{5}{2}}} = 0$.

6. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin(x+1) dx = \int \sin(x+1) d(x+1) = -\cos(x+1) + C$.

7. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x \Big|_1^2 = \ln \ln e^2 - \ln \ln e = \ln 2$.

8.【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = -2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 2.$

9.【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了微积分基本定理的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = \cos 0 = 1.$

10.【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了随机变量概率分布的性质的知识点.

【应试指导】 由随机变量概率分布的性质可得 $a + 3a + a = 1$, 解得 $a = 0.2$.

11.【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数的渐近线的知识点.

【应试指导】 由于函数 $y = 3\arctan x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上连续, 所以函数 $y = 3\arctan x$ 无垂直渐近线. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3\arctan x =$

$3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} 3\arctan x = 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$, 故其水平渐近线方程为 $y = \pm \frac{3\pi}{2}$.

12.【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了分步乘法计数原理的知识点.

【应试指导】 先排丙、丁两人, 共有 $A_2^2 = 2$ 种排法, 丙、丁排好后形成 3 个空位, 将甲、乙插入这 3 个空位, 有 $A_3^2 = 6$ 种排法, 所以总排法有 $2 \times 6 = 12$ 种.

二、填空题

13.【答案】 $y = \frac{1}{2}x - 1$

【考点点拨】 本题考查了曲线的法线的知识点.

【应试指导】 $y' = (-2e^x + 1)' = -2e^x$, 则 $y'(0) = -2e^0 = -2$, 所以点 $(0, -1)$ 处的法线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 因此

所求法线方程为 $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$, 即 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

14.【答案】 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

【考点点拨】 本题考查了函数的单调区间的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 - 1}{2x} (x > 0)$. 令 $f'(x) < 0$, 即 $4x^2 - 1 < 0$, 解得 $0 < x <$

$\frac{1}{2}$, 故函数的单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

15.【答案】 $2xydx + (x^2 - \sin y)dy$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \sin y$, 所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 2xydx + (x^2 - \sin y)dy$.

三、解答题

16. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} = yx^{y-1},$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x = x^y \ln x.$

17. 曲线绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi}^{2\pi} (4\sin x)^2 dx = 16\pi \int_{-\pi}^{2\pi} \sin^2 x dx \\ &= 16\pi \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= 8\pi \int_{-\pi}^{2\pi} (1 - \cos 2x) dx \\ &= 8\pi \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{2\pi} \\ &= 8\pi^2. \end{aligned}$$

18. 构造函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x, x > 0$.

则 $f'(x) = x - \frac{a}{x},$

令 $f'(x) = x - \frac{a}{x} = 0$, 解得 $x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}$ (舍去).

当 $0 < x < \sqrt{a}$ 时 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x > \sqrt{a}$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

因此 $f(x)$ 在 $x = \sqrt{a}$ 处取得最小值,

$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \ln a = \frac{1}{2}a(1 - \ln a),$

由于 $0 < a \leq e$, 有 $\ln a \leq 1$, 所以 $f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a) \geq 0,$

因此 $f(x) \geq f(\sqrt{a}) \geq 0,$

即 $a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2.$