

第十章 数列

本章要求

- (1) 了解数列及其通项, 前 n 项和的概念。
- (2) 理解等差数列的通项公式和前 n 项和的公式, 并能解决有关问题。
- (3) 理解等比数列的通项公式和前 n 项和的公式, 并能解决有关问题。

内容提要

一、数列的有关概念

1 定义; $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 首项, 项数,

2 通项和前 n 项之和;

通项; a_n

前 n 项之和; S_n

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} \\ a_1 = S_1 \end{cases}$$

二、等差数列

1 定义; 每一项与前一项的差等于常数 d , 叫公差

2 通项公式; $a_n = a_1 + (n-1)d$

3 等差中项; x 与 y 的等差中项 $x+y/2$

4 前 n 项和公式;

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

三、等比数列

1 定义; 每一项与前一项的比等于常数 q , 叫公比

2 通项公式; $a_n = a_1 q^{n-1}$

3 等差中项; x 与 y 的等比中项 $\pm \sqrt{xy}$

4 前 n 项和公式;

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

例题 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公差 $d \neq 0$, a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $d =$

【2018 年真题】

- A -2 B -1
C 1 D 2

【答案】A

【解析】

$$(a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 5d)$$

$$a_1^2 + 4a_1d + 4d^2 = a_1^2 + 6a_1d + 5d^2$$

$$2a_1d + d^2 = 0$$

$$d(2a_1 + d) = 0 \Rightarrow d = -2$$

例题2 设等差数列

(1) 求公差 d

(2) 若 $a_1 = 2$, 求 S_8

【2017年真题】

【解析】

$$(1) a_1 + d + a_1 + 3d - 2a_1 = 8$$

$$\Rightarrow 4d = 8 \Rightarrow d = 2$$

(2)

$$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(a_1 + a_1 + 7d)}{2}$$

$$= \frac{8 \times (4 + 14)}{2} = 72$$

例题3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_3 = 6$, 则 $a_7 =$

A 14 B 12 【2016年真题】
C 10 D 8

【答案】A

【解析】

$$a_3 = a_1 + 2d = 6$$

$$\Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_7 = a_1 + 6d$$

$$= 14$$

例题4 设等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 10$; $a_2 + a_3 = 6$ 且各项都是正数。

(1) 求通项公式

(2) 求前 n 项的和

【2016年真题】

【解析】

$$(1) a_1 + a_2 = 10 \Rightarrow a_1 + a_1 q = 10$$

$$a_2 + a_3 = 6 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^2 = 6$$

第1个式子除以第2个式子可得

$$5q^2 + 2q - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = -1 (\text{舍去}) \\ q = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{25}{4}$$

$$a_n = \frac{25}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

$$(2) S_n = \frac{\frac{25}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right]}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{125}{8} \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right]$$

例题5 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $q=3, a_4=9$, 则 $a_1 =$

【2015年真题】

A 27 B 1/9

C 1/3 D 3

【答案】C

【解析】

$$a_4 = 9 \Rightarrow a_1 q^3 = 9$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

例题6 设等差数列 $\{a_n\}$ 中, $d \neq 0; a_1 = \frac{1}{2}; a_1, a_2, a_5$ 成等比数列

(1) 求通项公式

(2) 若 $S_n = 50$ 求 n

【2015年真题】

【解析】

$$(1) a_2^2 = a_1 a_5$$

$$\Rightarrow (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 4d)$$

$$\frac{1}{4} + d + d^2 = \frac{1}{4} + 2d$$

$$d(d-1) = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} + n - 1 = n - \frac{1}{2}$$

$$(2) S_n = 50$$

$$\frac{50 \times \left(\frac{1}{2} + 49 \frac{1}{2} \right)}{2} = 50$$

$$\Rightarrow n = 25$$

例題 7 設數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項之和 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

(1) 求前 3 項

(2) 求通項公式

【2014 年真題】

【解析】

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{8}$$

$$(2) q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

例題 8 在等差數列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -\frac{3}{2}, a_6 = 1$, 則

A $a_3 = 0$

B $a_4 = 0$

C $a_5 = 0$

D 各項都不為 0

【答案】B

【解析】

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} + 5d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$0 = -\frac{3}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} \Rightarrow n = 4$$

例题 9 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, d = 3, a_n = 298$, 则 $n =$

- A 101 B 100
C 99 D 98

【答案】B

【解析】

$$298 = 1 + 3 \times (n-1)$$

$$\Rightarrow n = 100$$

例题 10 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{9}, a_4 = 3$

则该数列的前 5 项之积是

- A ± 1 B 3
C 1 D ± 3

【答案】C

【解析】

$$a_4 = 3 \Rightarrow a_1 q^3 = 3$$

$$\Rightarrow q = 3$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_1^5 q^{10}$$

$$= \frac{1}{3^{10}} 3^{10} = 1$$

例题 11 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 = 15, a_4 + a_5 = 15$. 则 $a_2 =$

- A -3 B 3
C 0 D 1

【答案】C

【解析】

$$a_7 = 15 \Rightarrow a_1 + 6d = 15$$

$$a_4 + a_5 = 15 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 15$$

第2个式子减去第1个式子得

$$a_1 + d = 0 = a_2$$

例题 12 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_6 = 81$ 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} =$

A -3

B 3

C 0

D 1

【答案】C

【解析】

$$a_5 a_6 = 81 \Rightarrow a_1^2 q^9 = 81 \Rightarrow (a_1^2 q^9)^5 = 81^5$$

$$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10}$$

$$= \log_3 a_1 a_2 \dots a_{10}$$

$$= \log_3 a_1^{10} q^{45} = \log_3 81^5 = 20$$

例题 13 已知 a, b, c 成等比数列, a, x, b 和 b, y, c 成等差数列且 $xy \neq 0$, 则 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y} =$

A 4 B $\frac{1}{4}$

C 2 D $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】设 a, b, c 的公比是 q

$$b = aq; c = aq^2$$

$$x = \frac{a + aq}{2}; y = \frac{aq + aq^2}{2}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = \frac{a}{\frac{a + aq}{2}} + \frac{aq^2}{\frac{aq + aq^2}{2}} = \frac{2(1 + q)}{1 + q} = 2$$

例题 14 设 $\lg a_1, \lg a_2, \lg a_3, \lg a_4$ 是公差为 2 的等差数列, 则 $\frac{a_4}{a_1} =$

【答案】106

【解析】

$$\lg a_4 = \lg a_1 + 6$$

$$\lg a_4 - \lg a_1 = 6$$

$$\lg \frac{a_4}{a_1} = 6 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 10^6$$

例题 15 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

(1) 求通项公式

(2) 243 是这个数列的第几项

【解析】

$$(1) a_1 = S_1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{3}{2}(3^n - 1) - \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1)$$

$$= \frac{3}{2}(3^n - 3^{n-1}) = 3^n$$

$$(2) 243 = 3^n = 3^5$$

$$\Rightarrow n = 5$$

例题 16 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 2$ 则 $a_n =$

A $3 \cdot 2^{n-1}$

B $2^n - 1$

C $4 \cdot 2^{n-1} - 2$

D $4 \cdot n^2 - 2$

【答案】C

【解析】用排除法

例题 17 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 2S_n + 1$ 则 $q =$

【答案】3

【解析】

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2S_n + 1 &\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2a_1 + 1 \\ a_3 = 6a_1 + 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 q = 2a_1 + 1 \\ a_1 q^2 = 6a_1 + 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow q = 3 \end{aligned}$$

例题 18 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1, q = -2, S_n = -11$ 则 $n =$

【答案】5

【解析】

$$S_n = -11 = \frac{-(1-(-2)^n)}{3}$$

$$\Rightarrow 33 = 1 - (-2)^n \Rightarrow n = 5$$

例题 19 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $q = 2, S_4 = 1$ 则 $S_8 =$

【答案】 17

【解析】

$$S_4 = 1 = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2^4-1}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{a_1(1-2^8)}{1-2} = \frac{2^8-1}{2^4-1} = 17$$

例题 20 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $q \neq 1, S_{20} = 100$ 则 $\frac{S_{40}}{1+q^{20}} =$

【答案】 100

【解析】

$$\begin{aligned} \frac{S_{40}}{1+q^{20}} &= \frac{\frac{a_1(1-q^{40})}{1-q}}{1+q^{20}} \\ &= \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} = S_{20} = 100 \end{aligned}$$