

成人高考 高数（二）

考前冲刺资料

一、函数、极限、连续

1、基本初等函数

(1) 函数的定义域

例：求 $y = \arcsin(1-x) + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域。

解：根据反正弦函数和对数函数的定义域要求，得
$$\begin{cases} -1 \leq 1-x \leq 1 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ ，两者取交集，得定义域为 $[0, 1)$ 。

(2) 函数的奇偶性问题

函数 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \sin x$ 是()。

因 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \sin x = \text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数}$ 。

例： $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ；

解：因 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
 $= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x)$ ，故该函数为奇函数。

2、极限

(1) 多项式极限（分子分母同时除以最大项）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 8}{2n^2 + 3n - 5} = \frac{3}{2}。$$

$$\therefore \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

(2) 无穷项求极限

方法 1: 求和 (等差求和、等比求和、裂项相消求和)

方法 2: 无法求和, 就用夹逼定理

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} (|a| < 1, |b| < 1);$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1+n)n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-a}{1-b}.$$

$$\text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right).$$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} < I_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} < \frac{n^2}{n^2 + 1},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1,$$

$$\therefore \text{根据夹逼定理: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right) = 1.$$

(3) 两个重要极限

$$\therefore \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x} \cdot x} = e^2.$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-2}{x+1}\right]^{\frac{x+1}{-2} \cdot (-2) \cdot (x+1)} = e^{-2}. \end{aligned}$$

(4) 等价无穷小代换求极限

①

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x}\right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{x}\right) = 0 - 1 = -1.$$

②

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\sqrt{\cos x} - 1)}$.

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$,

$$\sqrt{\cos x} - 1 = \sqrt{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{2}(\cos x - 1) \sim \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{4}x^2, \text{ 所以}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\sqrt{\cos x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{4}x^3} = -2.$$

3、函数的连续性

(1) 分段函数的连续性判定 (左右连续即左右极限相等)

①

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2a - bx, & x > 1 \end{cases} \text{ 在 } x = 1 \text{ 处连续, 求 } a, b \text{ 的值.}$$

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2a - bx) = 2a - b,$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,

$$\therefore \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

②

$$\text{讨论函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处的连续性.}$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 0,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore f(0-0) \neq f(0+0),$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

(2) 间断点的判断 (方法: 1-没定义的点肯定是间断点 2-分段函数的分段点可能是间断点)

①

$x = 0$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 的().

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore f(0-0) \neq f(0+0),$

$\therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

②

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|(x^2 - 3x + 2)}; \quad (2) f(x) = \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x}}};$$

【解】 (1) 间断点 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

$x_1 = 0$ 时, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{|x|(x^2 - 3x + 2)} = \infty, \therefore x_1 = 0$ 为无穷间断点.

$x_2 = 1$ 时, $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x|(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = -2, \therefore x_2 = 1$ 为可去间断点.

$x_3 = 2$ 时, $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{|x|(x^2 - 3x + 2)} = \infty, \therefore x_3 = 2$ 为无穷间断点.

(2) 间断点 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$x_1 = 0 \text{ 时, } f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e}, f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

$\therefore f(0-0) \neq f(0+0), \therefore x_1 = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

$x_2 = 1$ 时, $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e - e^{\frac{1}{x}}} = \infty, \therefore x_2 = 1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

二、导数与微分

1、导数的定义

①

例：(1) 设函数 $f(x) = (x-a)g(x)$ ，其中函数 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$ ；

解：因 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，故 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ ，又 $f(a) = 0$ ，

$$\text{所以 } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

②

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}$ ，则 $f'(1) =$

$$\text{【解】 } \because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}, = -2f'(1) = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f'(1) = -\frac{1}{4}.$$

③

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x} =$

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{3x} = 3f'(1).$$

2、导数的几何意义（切线、法线方程）

①

曲线 $y = \arctan x$ 在 $(1, \frac{\pi}{4})$ 处的切线方程为_____.

$$\because y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{切线方程: } y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2x - 4y + \pi - 2 = 0.$$

②

求 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

由导数的几何意义得，所求切线的斜率为 $k_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4$ ，从而所求切线方程为

$$y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}), \text{ 即 } 4x + y - 4 = 0.$$

3、可导可微与连续的关系

①

判断函数 $f(x) = |\sin x|$ 在点 $x = 0$ 处的连续性和可导性；

解：因 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0 = f(0)$ ，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

②

讨论 $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处的连续与可导.

$$f(1 - 0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x^2 + 2) = 6,$$

$$f(1 + 0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2.$$

$$\therefore f(1 - 0) \neq f(1 + 0),$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续也不可导.

4、六大类函数的求导

(1) 复合函数

①

求 $y = \sqrt[3]{1 - 2x^2}$ 的导数.

由于 $y = \sqrt[3]{1 - 2x^2}$ 是由 $y = \sqrt[3]{u}$ 和 $u = 1 - 2x^2$ 复合而成的, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} (-4x) = -\frac{4x}{3 \sqrt[3]{(1 - 2x^2)^2}}.$$

②

已知 $y = f^2[3\arccos(2x)]$, 求 y' ;

$$\text{解: } y' = 2f[3\arccos(2x)] \cdot f'[3\arccos(2x)] \cdot 3[\arccos(2x)]'$$

$$= 2f[3\arccos(2x)] \cdot f'[3\arccos(2x)] \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\right) \cdot 2$$

$$= -\frac{12f[3\arccos(2x)]f'[3\arccos(2x)]}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

(2) 隐函数

①

设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 e^y + y^2 = 1$ 所确定的函数, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,0)}$

视 y 是 x 的函数, 将方程两边对 x 求导, 得

$$2xe^y + x^2 e^y \cdot y' + 2y \cdot y' = 0,$$

$$\text{从而 } y' = \frac{-2xe^y}{x^2 e^y + 2y}.$$

$$\therefore y'|_{(1,0)} = \frac{-2 \cdot e^0}{1 \cdot e^0 + 0} = -2.$$

②

设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{xy} + y \ln y = \sin 2x$ 确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

视 y 是 x 的函数, 将方程两边对 x 求导, 得

$$e^{xy}(y + xy') + y' \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cos 2x,$$

$$\text{从而 } y' = \frac{2 \cos 2x - y \cdot e^{xy}}{x \cdot e^{xy} + \ln y + 1}.$$

(3) 参数方程所确定的函数 (求 dy/dx , 先求 dy/dt 和 dx/dt)

①

设参数方程 $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t^2 - 1 \end{cases}$ 确定 $y = f(x)$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{asint}{-acost} = -\tan t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-\sec^2 t}{-acost} = \frac{1}{a} \sec^3 t.$$

②

已知 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\text{得 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) = \frac{d \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)}{dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)' dt}{x' dt} = \frac{\frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2}}{2(1 - \cos t)} = -\frac{1}{2(1 - \cos t)^2}.$$

(4) 幂指函数（可两边取自然对数，指数形式变成乘积形式）

①

求幂指函数 $y = (\sin x)^{\cos x}$ ($\sin x > 0$) 的导数.

【解】 先在两边取自然对数,得

$$\ln y = \cos x \ln \sin x.$$

视 y 是 x 的函数,上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

$$y' = y(-\sin x \ln \sin x + \cot x \cdot \cos x) = (\sin x)^{\cos x} (\cot x \cos x - \sin x \ln \sin x).$$

②

求函数 $y = \frac{(2x+3)^4 \sqrt{x^2-6}}{\sqrt[3]{x+1}}$ 的导数.

【解】 先在两边取对数,得

$$\ln y = 4 \ln(2x+3) + \frac{1}{2} \ln(x^2-6) - \frac{1}{3} \ln(x+1).$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 4 \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-6} \cdot 2x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

$$\begin{aligned} y' &= y \left[\frac{8}{2x+3} + \frac{x}{x^2-6} - \frac{1}{3(x+1)} \right] \\ &= \frac{(2x+3)^4 \sqrt{x^2-6}}{\sqrt[3]{x+1}} \left[\frac{8}{2x+3} + \frac{x}{x^2-6} - \frac{1}{3(x+1)} \right]. \end{aligned}$$

(5) 抽象函数（※考的较少，根据自己的情况掌握）

$$y = 3^{f(\sin 2x)}$$

$$\text{解: } y' = [3^{f(\sin 2x)}]' = 3^{f(\sin 2x)} \ln 3 \cdot f'(\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$= 2 \ln 3 \cdot 3^{f(\sin 2x)} f'(\sin 2x) \cos 2x.$$

(6) 分段函数（主要是考虑分界点的导数，左右导数要相等才有导数存在）

三、中值定理与导数的应用

1、罗尔定理与拉格朗日中值定理

(1) 会求符合定理条件的 δ 的值

函数 $f(x) = x^2 - x - 2$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理, 结论 $\xi =$ _

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= 2\xi - 1 = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \\ \Rightarrow 2\xi - 1 &= \frac{4 - 2 - 2 - (-2)}{2 - 0} \Rightarrow 2\xi = 2 \Rightarrow \xi = 1. \end{aligned}$$

(2) 罗尔定理的带 δ 的相关证明题

验证函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足罗尔定理条件, 并求出定理中的 ξ .

【解】 因为 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$ 是多项式, 所以在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 故它在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 又 $f(1) = f(2) = 1$, 从而 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上满足罗尔定理条件.

由于 $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $3x^2 - 4x - 1 = 0$. 解方程得

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

显然 $x_2 \notin (1, 2)$, 应舍去; 而 $x_1 \in (1, 2)$, 因此取 $\xi = x_1$, 就有 $f'(\xi) = 0$.

2、洛必达法则

★ (1) 用洛必达法则前能用等价代换就先用等价代换

$$(2) \quad " \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 ";$$

这类均可用洛必达法则, 不过有些需要变形为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$,

①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \ln(1-x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

(先无穷小等价代换再用洛必达法则会更简单)

②

$$\text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

3、单调性、凹凸性、极值（最值）、拐点（四大题型必考）

（★改革新增利用单调性证明不等式大题）

例：① 求 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值：

解：函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，

$$\text{令 } f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = 0, \text{ 得驻点 } x = \frac{2}{5} \text{ 及不可导点 } x = 0,$$

用这两个点把定义域分为 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{2}{5})$, $(\frac{2}{5}, +\infty)$ 三部分，

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x \in (0, \frac{2}{5})$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (\frac{2}{5}, +\infty)$ 时，

$f'(x) > 0$ ，故函数的单调增加区间为 $(-\infty, 0]$ 和 $[\frac{2}{5}, +\infty)$ ，函数的单调减少区间为

$[0, \frac{2}{5}]$ ， $x = 0$ 是函数的极大值点，极大值为 $f(0) = 0$ ， $x = \frac{2}{5}$ 是函数的极小值点，极

$$\text{小值为 } f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 \cdot \sqrt[3]{20}}{25}.$$

② 求 $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ 的凹凸区间和拐点：

解：函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，由 $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$ ，

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}, \text{ 可得 } f''(x) \text{ 不存在的点 } x = -2,$$

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时， $f''(x) > 0$ ，函数为凹的，当 $x \in (-2, +\infty)$ 时， $f''(x) < 0$ ，

函数为凸的，所以函数的凹区间为 $(-\infty, -2]$ ，凸区间为 $[-2, +\infty)$ ，又 $f(-2) = 0$ ，故

函数的拐点为 $(-2, 0)$ 。

③

设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = -1$ 处取得极小值 -2 ，则 a, b 取值为_____。

【解】 $\because f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, f'(-1) = 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ -1 + a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

④

求 $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最值。

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{6}, x_4 = \frac{5\pi}{6}$. 分别计算点 $x = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$,

$x = 2\pi$ 处的值, 得 $f(0) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}, f(2\pi) = \frac{1}{2}$,

所以函数在 $[0, 2\pi]$ 内的最小值是 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, 最大值是 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

⑤利用单调性证明不等式

例题

证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

【证】 令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 则 $f'(x) = [\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}]' = \frac{x}{(1+x)^2}$. 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x)$

> 0 , 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加. 从而当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$,

亦即 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x} (x > 0)$.

~~~练习题

证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$.

【证】 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, 则 $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2 = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 > 0$. 因此, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 从而 $f(x) > f(0) = 0$. 故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$.

证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

(2) 当 $x > 0$ 时, $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

(3) 当 $x > 0$ 时, $\arctan x < x$; 当 $x < 0$ 时, $\arctan x > x$.
(或 $|\arctan x| < |x|$)

(4) 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

6. (1) 证明:原命题等价于 $(1+x)\ln(1+x) - x > 0$.

令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x, x \in (0, +\infty)$, 则

$$f'(x) = \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x) > 0,$$

$x \in (0, +\infty)$.

所以 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x, x \in (0, +\infty)$ 单调增加. 故当 $x > 0$ 时, $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x > f(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

(2) 证明:令 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0, x \in (0, +\infty).$$

所以 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少. 故当 $x > 0$ 时, $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} > \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 即 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

(3) 证明:令 $f(x) = \arctan x - x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$-1 < 0, x \in (-\infty, +\infty)$.

所以 $f(x) = \arctan x - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少.

故当 $x > 0$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\arctan x < x$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\arctan x > x$.

(4) 证明:令 $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$-\sqrt{1+x^2}, x \in [0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \ln 1 = 0, x \in [0, +\infty)$.

所以 $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. 故当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > f(0) = 0$, 即 $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

4、曲线的渐近线 (※可选。根据自己情况掌握)

① 求 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的渐近线 (主要是水平和垂直渐近线);

解: 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1$, 故曲线的水平渐近线为 $y = 1$;

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty$, 故曲线的垂直渐近线为 $x = 0$;

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 0$, 故曲线无斜渐近线。

② 求 $y = x\ln(e + \frac{1}{x})$ 的渐近线 (所有的)。

解：因 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(e + \frac{1}{x}) = \infty$ ，故曲线无水平渐近线；

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(e + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e + \frac{1}{x}} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} x \ln(e + \frac{1}{x}) = +\infty$ ，故曲线有一条垂直渐近线 $x = -\frac{1}{e}$ ；

$$\text{又 } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(e + \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \ln(e + \frac{1}{x}) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(e + \frac{1}{x}) - 1]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(e + \frac{1}{x}) - \ln e] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{e + \frac{1}{x}}{e} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{ex} = \frac{1}{e}, \text{ 故曲线有一条斜渐近线为 } y = x + \frac{1}{e}.$$

四、不定积分

1、不定积分的概念（题目不一定告诉你求不定积分，而是求原函数，求解过程一样）

例：① 已知 $y = \ln(-x)$ 是 $y = f(x)$ 的原函数，则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

解：由题意， $f(x) = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ ，所以 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 。

② 函数 $y = xe^{-x}$ 的原函数为 ()；

解：因 $\int xe^{-x} dx = \int x d(-e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$ ，

故函数 $y = xe^{-x}$ 的原函数为 $-xe^{-x} - e^{-x} + C$ 。

2、不定积分的计算

(1) 凑微分法

①

求 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \int \frac{1}{a^2 \left[1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} d\left(\frac{x}{a} \right) \\ &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

②

若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = (\quad)$.

$$\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = - \int f(e^{-x}) de^{-x} = -F(e^{-x}) + C.$$

(2) 第二换元积分法 (被积函数带根号)

① 三角代换

如果被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 作代换 $x = a \sin t$ 或 $x = a \cos t$; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 作代换 $x = a \tan t$; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 作代换 $x = a \sec t$. 利用三角代换, 可以把根式积分化为三角有理式积分.

【解】 令 $x = 2 \sin t$, 则 $dx = 2 \cos t dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= \int \frac{4 \sin^2 t}{2 \cos t} 2 \cos t dt = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = 2 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} + C \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + C.\end{aligned}$$

② 倒代换 (令 $x=1/t$)

如果被积函数的分子和分母关于积分变量 x 的最高次幂分别为 m 和 n , 当 $n - m > 1$ 时, 用倒代换常可以消去在被积函数的分母中的变量因子 x .

求 $\int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx & \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \left(-\frac{1}{t^2} dt\right) = -\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 & = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} d(1-t^2) \\
 & = -\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C.
 \end{aligned}$$

③幂代换

如果被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, 作代换 $\sqrt[n]{ax+b} = t$.

求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx & \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int 1 - \frac{1}{t+1} dt \\
 & = 2t - 2\ln|t+1| + C \\
 & = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.
 \end{aligned}$$

3、抽象计算（※可选，根据自己情况掌握）

例：① 设 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 求 $\int xf(1-x^2) dx$;

解法一： $\int xf(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2} (1-x^2)^2 + C$ 。

解法二：等式 $\int f(x) dx = x^2 + C$ 两边对 x 求导，得 $f(x) = 2x$,

故 $\int xf(1-x^2) dx = \int x \cdot 2(1-x^2) dx = \int (2x - 2x^3) dx = x^2 - \frac{1}{2} x^4 + C$ 。

② 设 $f(x) = e^{-x}$, 求 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx$;

解：由 $f(x) = e^{-x}$ 得, $f'(x) = -e^{-x}$, 则 $f'(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$,

故 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$ 。

五、定积分

1、定积分的概念与性质

例：(1) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$; (几何意义或第二类换元法)

解法一：当下限小于上限、被积函数非负时，定积分表示曲边梯形的面积，而 $y = \sqrt{4-x^2}$ 、

$x=0$ 、 $x=2$ 及 x 轴所围成的图形正好为第一象限内的四分之一圆，故此积分表示四分

之一圆的面积，故 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi$ 。

解法二：令 $x = 2 \sin t$ ，则 $dx = 2 \cos t dt$ ，当 $x=0$ 时， $t=0$ ，当 $x=2$ 时， $t = \frac{\pi}{2}$ ，

故原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ 。

(2) 已知连续函数 $f(x) = x^2 + e^{-2x} - \int_0^1 f(x) dx$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

解：等式 $f(x) = x^2 + e^{-2x} - \int_0^1 f(x) dx$ 两端取 0 到 1 的定积分，得

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [x^2 + e^{-2x} - \int_0^1 f(x) dx] dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 e^{-2x} dx - \int_0^1 [\int_0^1 f(x) dx] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{2e^2} - \int_0^1 f(x) dx,$$

$$\text{故 } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2e^2} \right) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4e^2}.$$

注：由于 $\int_0^1 f(x) dx$ 为常数，而常数可以提到积分号外面，故

$$\int_0^1 [\int_0^1 f(x) dx] dx = \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

2、定积分的计算

(1) 换元积分法

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

设 $\sqrt{x} = t (t > 0)$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$. 当 x 从 1 变到 4 时, t 从 1 变到 2, 于是

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + t} dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t + 1} dt = 2 \ln(t + 1) \Big|_1^2 = 2 \ln \frac{3}{2}.$$

(2) 分部积分法 (用的较多)

$$\text{求 } \int_0^{\pi} x \cos x dx.$$

【解】 设 $u = x, dv = \cos x dx$, 则 $du = dx, v = \sin x$, 于是

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.$$

※除了以上的方法, 还可以用不定积分的代换的方法, 但是要记住在定积分的求解中令 $x=f(t)$, t 的取值要改变

3、积分上限上限函数 (变上限定积分, 主要求导)

①

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t \sqrt[3]{1+t^2} dt}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} t \sqrt[3]{1+t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x^3 \sqrt[3]{1+x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt[3]{1+x^4}} = 2.$$

② 已知 $\int_0^{x^3} f\left(\frac{t}{2}\right) dt = x$, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$:

解: 等式 $\int_0^{x^3} f\left(\frac{t}{2}\right) dt = x$ 两边对 x 求导, 得 $f\left(\frac{x^3}{2}\right) \cdot 3x^2 = 1$

令 $x = 2$, 可得 $f(4) \cdot 12 = 1$, 故 $f(4) = \frac{1}{12}$.

③

求 $f(x) = \int_0^{x^2} t(t-1) dt$ 的极值; (这种问题如何处理?)

解：令 $f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} t(t-1)dt = x^2(x^2-1) \cdot 2x = 2x^3(x^2-1) = 0$ ，得驻点

$x = -1$ ， $x = 0$ ， $x = 1$ ，用三个驻点把定义域分为 $(-\infty, -1)$ ， $(-1, 0)$ ， $(0, 1)$ ，

$(1, +\infty)$ ，当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，当

$x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，故函数在 $x = -1$ 处取

得极小值，极小值为 $f(-1) = \int_0^1 t(t-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$ ，函数在 $x = 0$ 处取

得极大值，极大值为 $f(0) = 0$ ，函数在 $x = 1$ 处也取得极小值，极小值为

$$f(1) = \int_0^1 t(t-1)dt = -\frac{1}{6}.$$

★遇到求极值最值就想到用求导，这是变积分上限函数求导

④

设 $f(x)$ 可导，且 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 2$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$ ；

解： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f'(0) = 1$

⑤

设连续函数 $f(x) = x^2 + \int_0^x tf(t)dt$ ，求 $f(x)$ 的表达式。

解：等式 $f(x) = x^2 + \int_0^x tf(t)dt$ 两端对 x 求导，得 $f'(x) = 2x + xf(x)$ ，

记 $y = f(x)$ ，上式变为 $y' = 2x + xy$ ，即 $y' - xy = 2x$ ，此为一阶线性微分方程，

通解为 $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C] = e^{\int xdx} (\int 2xe^{-\int xdx} dx + C)$

$= e^{\frac{1}{2}x^2} (\int 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx + C) = e^{\frac{1}{2}x^2} [-2 \int e^{-\frac{1}{2}x^2} d(-\frac{1}{2}x^2) + C] = e^{\frac{1}{2}x^2} (-2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C)$

$= -2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ，又等式 $f(x) = x^2 + \int_0^x tf(t)dt$ 中，令 $x = 0$ ，得 $f(0) = 0$ ，代入

通解，得 $C = 2$ ，故 $y = -2 + 2e^{\frac{1}{2}x^2}$ ，即 $f(x) = -2 + 2e^{\frac{1}{2}x^2}$ 。

3、定积分求平面图形的面积、旋转体体积

例：(1) 已知曲线 $y = x^2$ 与 $y = cx^3$ ($c > 0$) 所围图形的面积为 $\frac{2}{3}$ ，求 c 的值；

解：画出图形，将此图形看做 X -型区域，得面积

$$A = \int_0^{\frac{1}{c}} (x^2 - cx^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{cx^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{3c^3} - \frac{1}{4c^3} = \frac{1}{12c^3} = \frac{2}{3}, \text{ 得 } c = \frac{1}{2}.$$

(2)

设平面图形 D 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$ ，直线 $y = x$ 及 $x = 3$ 所围成的部分，求 D 绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积。

因曲线 $y = \frac{1}{x}$ ，直线 $y = x$ 的交点为 $(1, 1)$ ，

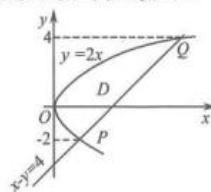
$$\text{所以 } V_x = \int_1^3 \left(\pi x^2 - \pi \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left| \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{x} \right) \right|_1^3 = 8\pi.$$

(3)

计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y = 4$ 所围平面图形的面积(图 5)

方法一：求出两条曲线的交点 $(2, -2)$ 和 $(8, 4)$ ，所求面积

$$A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18.$$



方法二：用直线 $x = 2$ 将图形分成两部分，左侧图形的面积

$$A_1 = \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})] dx = 2\sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{16}{3},$$

右侧图形的面积

$$A_2 = \int_2^8 [\sqrt{2x} - (x - 4)] dx = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + 4x \right]_2^8 = \frac{38}{3}.$$

所求图形的面积

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18.$$

☆点评：实际计算中，应选取合适的积分变量，使计算简化

六、多元函数的微分学

1、求偏导数（★求哪个变量，另一个变量被视为常数）

例 求 $z = 2x^2 - 3xy + 2y^3$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

【解】 方法一: 把 y 看作常数, 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$; 把 x 看作常数, 得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 6y^2$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=2} = 4 \times 1 - 3 \times 2 = -2$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=1, y=2} = (-3) \times 1 + 6 \times 2^2 = 21$.

方法二: 先将 $y = 2$ 代入 $z = 2x^2 - 3xy + 2y^3$, 得 $z|_{y=2} = 2x^2 - 6x + 16$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} = (4x - 6) \Big|_{x=1} = -2$

同理, 将 $x = 1$ 代入 $z = 2x^2 - 3xy + 2y^3$, 得 $z|_{x=1} = 2 - 3y + 2y^3$,

于是 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=2} = (-3 + 6y^2) \Big|_{y=2} = 21$.

(2) 已知 $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$;

证明: 因 $\frac{\partial z}{\partial x} = x + e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = x + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xe^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = x + e^{\frac{y}{x}},$$

故 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x(x + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}) + y(x + e^{\frac{y}{x}}) = 2xy + xe^{\frac{y}{x}} = xy + z$.

(3) 设 $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2、求全微分

(1)

例: 求函数 $z = x^2y + y^2$ 的全微分.

因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, 所以 $dz = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$.

(2) 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1$ 、 $y = 2$ 时的全微分；

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$,

则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2}{3}$

故 $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} dy = \frac{1}{3} dx + \frac{2}{3} dy$ 。

3、隐函数的偏导数

①

求方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数。

$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, 则 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$ 。

由公式(4), 当 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{2x/a^2}{2y/b^2} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

②

例：设 $z = z(x, y)$ 是由 $z + e^z = xy$ 所确定的二元函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ；

解：设 $F(x, y, z) = z + e^z - xy$,

则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-y}{1 + e^z} = \frac{y}{1 + e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-x}{1 + e^z} = \frac{x}{1 + e^z}$,

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{1 + e^z} \right) = \frac{1 + e^z - y \cdot e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(1 + e^z)^2}$

$= \frac{1 + e^z - y \cdot e^z \cdot \frac{x}{1 + e^z}}{(1 + e^z)^2} = \frac{(1 + e^z)^2 - xye^z}{(1 + e^z)^3}.$

4、二元函数的极值

①

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x$ 的极值.

$$\text{由} \begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y + 2 = 0 \end{cases} \text{得驻点为}(1, -1).$$

$$f''_{xx} = 2, f''_{yy} = 2, f''_{xy} = 0.$$

$B^2 - AC < 0, A > 0$, 所以 $(1, -1)$ 为极小值点, $f(1, -1) = -2$ 为极小值.

②

用钢板做成一个表面积为 54 m^2 的有盖长方体水箱, 欲使水箱的容积最大, 则水箱的最大容积

【解】 设水箱的长、宽、高分别为 x, y, z , 则有 $2xy + 2yz + 2xz = 54$, 即 $xy + yz + xz = 27$, 体积 $V = xyz$.

令 $F(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - 27)$,

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = yz + \lambda(y + z) = 0 \\ F'_y = xz + \lambda(x + z) = 0 \\ F'_z = xy + \lambda(y + x) = 0 \\ F'_\lambda = xy + yz + xz - 27 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = 3, y = 3, z = 3.$$

由驻点 $(3, 3, 3)$ 唯一, 实际中确有最大值, 故当 $x = 3, y = 3, z = 3$ 时长方体体积最大, 最大值 $V = 27$.

七、古典概型

考点一：古典概率的计算

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{A \text{ 包含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

根据古典概率的定义, 要计算古典概率, 就是要计算样本空间中基本事件总数和事件 A 中包含的基本事件数, 古典概率就是两个数的比。

典型例题 某对夫妇按照国家对少数民族政策，可以生两胎。

假设他们每胎只生一个孩子的话，求：

- (1) 两胎全是女孩的概率；
- (2) 两胎之中至少有一胎是女孩的概率。

解： $\Omega = \{(\text{男男}), (\text{男女}), (\text{女男}), (\text{女女})\}$ ，

- (1) 设 A 代表事件“两胎全是女孩”，则 $N_A = 1$ ，

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{4};$$

考点二：概率的性质

要求：概率总共有 6 个性质，其中的红色标记部分是重点，需要掌握并灵活运用。

典型例题 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答甲、乙二类问题的概率分别为 0.7 和 0.2，两类问题都能答出的概率为

0.1。求小王

- (1) 答出甲类而答不出乙类问题的概率；
- (2) 至少有一类问题能答出的概率；
- (3) 两类问题都答不出的概率。

考点三：事件独立性——重点

典型例题 两门高射炮彼此独立的射击一架敌机，设甲炮击中敌机的概率为 0.9，乙炮击中敌机的概率为 0.8，求敌机被击中的概率？

解：设 $A = \{\text{甲炮击中敌机}\}$ ， $B = \{\text{乙炮击中敌机}\}$ ，那么
 $\{\text{敌机被击中}\} = A \cup B$ ；

因为 A 与 B 相互独立，所以，有：

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ &= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98 \end{aligned}$$

考点四：离散型随机变量及其概率分布——重点

要求：在理解离散型随机变量概念的基础上，掌握分布律的定义，会求离散型随机变量的分布律（求分布律就是求随机变量取每一个值的概率）。

典型例题 设袋中装着分别标有-1, 2, 2, 2, 3, 3 数字的六个球，现从袋中任取一球，令 X 表示取得球上所标的数字，求 X 的分布律。

解： X 的可能取值为 -1, 2, 3，且容易求得

$$P\{X = -1\} = \frac{1}{6}, P\{X = 2\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P\{X = 3\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

考点五：离散型随机变量的期望和方差—重点

要求：掌握期望的方差的计算公式

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求 $E[X(X+1)]$

解：

(1) 由概率的性质可知 $a+0.5+b=1$,

又 $E(X) = 0$, 得 $-1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0$,

故有 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{6}$

(2) $E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X)$,

而 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{3} \cdot (-1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0 - 0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 0)^2$

因此 $E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1$

考点六：相邻问题-考点

要求：掌握这类的问题常用的方法—捆绑法，将需要相邻的或者是不相邻的捆绑在一起当成一个整体，然后再进行排列组合。

典型例题

把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排，则 2 本英语书恰好相邻的概率为

解：将 2 本英语书捆绑在一起，视为一本书，那么 5 本书就视为 4 本书进行全排列。但是不要忘记两本不同的英语书也要进行排列。所以过程如下：

$$2 \text{ 本英语书恰好相邻的概率为 } \frac{A_4^4 \cdot A_2^2}{A_5^5} = \frac{2}{5}$$