

精华考点 6 页纸

高等数学（二）

专科起点升本科

第一章 极限与连续

考点 1 函数极限四则运算法则

如果有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ \infty, & m > n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

考点 2 无穷小的等价代换定理

设 $\alpha(x), \bar{\alpha}(x), \beta(x), \bar{\beta}(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小量, 且满足

$\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x), \beta(x) \sim \bar{\beta}(x), f(x), g(x)$ 在这一条件下有意义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)f(x)}{\bar{\beta}(x)g(x)}$ 存在, 即

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)f(x)}{\bar{\beta}(x)g(x)}.$$

常用的等价无穷小:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \tan x$,

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ (α 为实常数, $\alpha \neq 0$).

考点 3 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

第二章 一元函数微分学

考点 1 导数的定义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数可表示为: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

考点 2 函数在一点可导的充要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等, 即

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A.$$

考点3 可导和连续的关系

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处必连续; 反之不一定成立, 即

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 它在该点不一定可导.

考点4 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在, 则表明曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处

存在切线, 且切线的斜率为 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程

$$\text{为 } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) (f'(x_0) \neq 0).$$

考点5 导数的四则运算

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 可导, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv', (ku)' = ku' \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

考点6 基本初等函数的导数公式

$$(c)' = 0 \quad (c \text{ 为常数}); \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

考点7 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 复合成 $y = f[g(x)]$, 若 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$ 在相

应点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导, 且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

考点8 隐函数求导法则

设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定. 求 y' 只需直接由方程 $F(x, y) = 0$ 关于 x 求导, 将 y 认作中间变量, 以复合函数链式法求之 (也可以用于多元函数的隐函数求导法).

考点 9 可微与可导的关系

$f(x)$ 在点 x 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x 可导, 且 $dy = f'(x)dx$.

考点 10 洛必达法则 (“ $\frac{0}{0}$ ” 型或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式)

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

(1) 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x| > N$) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0$ 或 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty$.

(3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点 11 函数单调性的判定

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调增加的函数.

(2) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调减少的函数.

考点 12 函数取得极值的充分条件

1. 第一种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或在点 x_0 处 $f'(x)$ 不存在).

若在此邻域内:

(1) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值

$f(x_0)$.

(2) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值

$f(x_0)$.

若当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

2. 第二种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. 若

(1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.

(2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

(3) $f''(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值, 也可能不取得极值, 这时需要用第一种充分条件判定.

考点 13 最大值与最小值的求法

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有驻点、导数不存在的点.

(2) 求出上述各点及区间两个端点 $x = a, x = b$ 处的函数值.

(3) 进行比较, 其中最大的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 而其中最小的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

考点 14 曲线凹凸性及拐点的判定

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导.

(1) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的.

(2) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的.

求出使二阶导数等于零的点, 以及二阶导数不存在的点, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线弧 $y = f(x)$ 的拐点.

第三章 一元函数积分学

考点 1 第一换元积分法 (凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

第一换元积分法六字口诀 “换元—积分—还原”.

考点 2 第二换元积分法

设 $x = \varphi(t)$ 是单调可导函数, 又已知 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$, 则 $\Phi[\varphi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数. 即 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C$. 其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

考点 3 分部积分法

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 具有连续的导函数, 则有 $\int u dv = uv - \int v du$.

利用分部积分法的关键在于选择适当的 u 和 dv . 一般来说, 需要考虑: 先要考虑 dv , 要便于求出原函数 v ; 再考虑利用分部积分公式后, $\int vdu$ 比 $\int u dv$ 便于计算.

考点 4 变上限积分的求导

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则变上限积分 $R(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $R'(x) = f(x)$ 或 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

考点 5 牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

考点 6 求平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围图形面积为 $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

由两曲线 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x) (f_2(x) > f_1(x))$ 及两直线 $x = a, x = b (a < b)$ 所围图形的面积为 $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

考点 7 旋转体的体积

由曲线段 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

上述体积公式也可以看做由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积.

第四章 多元函数微分学

考点 1 全微分

若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, $A = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, 则有

$$dz \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} dy.$$

考点 2 复合函数的偏导数

设函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处有连续偏导数. 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数. 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处对 x, y 有连续偏

导数, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$.

考点 3 一元隐函数的偏导数

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定 y 是 x 的函数, 且 $F(x, y)$ 在点 (x, y) 的某个邻域内具有连续偏导

数, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} (F_y(x, y) \neq 0)$.

考点 4 极值存在的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在其驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶的连续偏导数, 令

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), \Delta = B^2 - AC, \text{ 于是有}$$

(1) 如果 $\Delta < 0$, 则点 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 且当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极大值; 当

$A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值.

(2) 如果 $\Delta > 0$, 则点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点.

(3) 如果 $\Delta = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有无极值不能确定, 需用其他方法判别.

第五章 概率论初步

考点 1 事件的独立性

如果 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, 则称事件 A, B 是相互独立的.

考点 2 期望的性质

(1) $E(C) = C$ (C 为常数).

(2) $E(kX) = kE(X)$.

(3) $E(k_1X + k_2Y) = k_1E(X) + k_2E(Y)$.

(4) 若 X, Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

考点 3 方差的性质

(1) $D(C) = 0$.

(2) $D(X + C) = D(X)$.

(3) $D(kX) = k^2D(X)$.

(4) 若 X, Y 相互独立, 则 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

(5) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.