

成人高考《高等数学（二）（专升本）》考前揭秘卷（一）

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} =$ ()。

- A、-6
- B、0
- C、6
- D、3

正确答案：A

答案解析：本题考查的是求极限。 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6$ ，因此选择 A。

2、设函数 $f(x) = x^4 + 3x - 1$ ，则 $f'(1) =$ ()。

- A、4
- B、5
- C、6
- D、7

正确答案：D

答案解析：本题考查的是函数的导函数 $f'(x) = 4x^3 + 3$ ，将 $x = 1$ 代入，得 $f'(1) = 7$ ，因此选择 D。

3、如果 $f'(3) = 3$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x)-f(3-x)}{2x} =$ ()。

- A、6
- B、-3
- C、3
- D、6

正确答案：C

答案解析：

本题考查的是导数的定义 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x)-f(3-x)}{2x} = f'(3) = 3$ ，因此选择 C。

4、函数 $y = 2xe^x$ ，则 $y'' =$ ()。

A、 $y = 2(x+2)e^x$

B、 $y = 2x^2 e^x$

C、 $y = 2e^{2x}$

D、 $y = 2(x+1)e^x$

正确答案：A

答案解析：本题考查的是函数的高阶导数 $y' = 2(x+1)e^x$ ， $y'' = 2(x+2)e^x$ ，因此选择 A。

5、 $\int \cos x dx = ()$ 。

A、 $\cos x + C$

B、 $\sin x + C$

C、 $-\cos x + C$

D、 $-\sin x + C$

正确答案：B

答案解析：本题考查的是不定积分的计算 $\int \cos x dx = \sin x + C$ ，因此选择 B。

6、若函数 $f(x) = \int_0^x \sin(2t)dt$ ，则 $()$ 。

A、 $\sin 2x$

B、 $2\sin 2x$

C、 $\cos 2x$

D、 $2\cos 2x$

正确答案：A

答案解析：本题考查的是变上限积分求导，因为 $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$ ，所以

$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(2t)dt = \sin 2x$ ，因此选择 A。

7、 $\int_1^{21} \frac{1}{x} dx = ()$ 。

A、 $\ln 2$

- B、 $-\ln 2$
C、 $\ln 3$
D、 $-\ln 3$

正确答案：A

答案解析：本题考查的是牛顿-莱布尼茨公式。 $\int_1^{21} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{21} = \ln 21$ ，因此选择 A。

8、设函数 $z = x^3y - xy^3$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()。

- A、 $6xy$
B、 $3x^2 - 3y^2$
C、 $-6xy$
D、 $3y^2 - 3x^2$

正确答案：B

答案解析：本题考查的是二元函数的二阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 3x^2 - 3y^2$ ，因此选择 B。

9、设函数 $z = 2(x + y) - x^2 + y^2$ ，则其驻点是 ()。

- A、 $(0, 0)$
B、 $(-1, 1)$
C、 $(1, 1)$
D、 $(1, -1)$

正确答案：D

答案解析：本题考查的是二元函数的驻点。解得驻点是 $\begin{cases} z_x = 2 - 2x = 0, \\ z_y = 2 + 2y = 0 \end{cases}$ ，因此选择 D。

10、设 A 与 B 相互独立， $P(A) = 0.5$ ， $P(B) = 0.6$ ，则 $P(A \cup B) =$ ()。

- A、0.2
B、0.3
C、0.4
D、0.8

正确答案：D

答案解析：本题考查的是独立事件的概率。因为 A 与 B 相互独立，所以

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.3, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8,$$

因此选择 D。

二、填空题（11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2+2-1} =$ _____。

参考答案：-1

答案解析：本题考查的是求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2+2-1} = \frac{0-1}{0+2-1} = -1$ 。

12、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x+3}{4x^3-5} =$ _____。

参考答案： $\frac{1}{4}$

答案解析：本题考查的是求极限。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x+3}{4x^3-5} = \frac{1}{4}$ 。

13、设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ _____。

参考答案：-2

答案解析：本题考查的是函数的连续性。 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2$ ，因为函数

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ ，所以 $a = -2$ 。

14、函数 $y = (x-1)^4 + 1$ 的拐点坐标是_____。

参考答案：(1, 1)

答案解析：本题考查的是函数的拐点。 $y' = 4(x-1)^3$ ， $y'' = 12(x-1)^2$ ，令 $y'' = 0$ ，解得 $x=1$ ，所以拐点的坐标是 (1, 1)。

15、曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 在点 (-1, 1) 处的切线方程是_____。

参考答案： $x - y + 2 = 0$

答案解析：本题考查的是曲线的切线。 $y' = \frac{1}{x^2}$ ，当 $x = -1$ 时， $y' = 1$ ，所以曲线在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程是 $y - 1 = x + 1$ ，整理得 $x - y + 2 = 0$ 。

16、曲线 $y = \frac{x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线方程是_____。

参考答案： $x = 1$

答案解析：本题考查的是曲线的铅直渐近线。 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$ ，所以 $x = 1$ 是曲线的铅直渐近线。

17、 $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} =$ _____。

参考答案： $\ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C$

答案解析：本题考查的是不定积分的计算。

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C.$$

18、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^4 \sin x + \cos x) dx =$ _____。

参考答案：2

答案解析：本题考查的是对称区间上的积分。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^4 \sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

19、 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$ _____。

参考答案： $\frac{3\pi}{4}$

答案解析：本题考查的是反常积分。 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{4}$ 。

20、设 $y = y(x)$ 是由方程 $y = \ln(x + 2y)$ 所确定的隐函数，则 $y' =$ _____。

参考答案： $\frac{1}{x+2y-2}$

答案解析：本题考查的是隐函数求导。两边对 x 求导， $y' = \frac{1+2y'}{x+2y}$ ，整理得 $y' = \frac{1}{x+2y-2}$ 。

三、解答题（21~28 题，共 49 分。解答应写出推理、演算步骤）

21、求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$ 。

参考答案： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{4}}\right)^{\frac{x-2}{4} \times 4+2} = e^4$ 。

答案解析：本题考查的是两个重要极限。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{4}}\right)^{\frac{x-2}{4} \times 4+2} = e^4$$

22、设函数 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ ，求 $f'(x)$ 。

参考答案： $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \times \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$ 。

答案解析：本题考查的是复合函数求导。

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \times \frac{-2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

23、求 $\int 2x \ln x dx$ 。

参考答案：

$$\begin{aligned} \int 2x \ln x dx &= \int \ln x dx^2 = \ln x \cdot x^2 - \int x^2 d(\ln x) = x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = \\ &= x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

答案解析：本题考查的是不定积分的分部积分法。

$$\begin{aligned} \int 2x \ln x dx &= \int \ln x dx^2 = \ln x \cdot x^2 - \int x^2 d(\ln x) = x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = \\ &= x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

24、求 $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$.

参考答案: $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = \arctan e^x \Big|_0^{\ln\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}$.

答案解析: 本题考查的是定积分的换元积分法。

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{(e^x)^2 + 1} de^x = \arctan e^x \Big|_0^{\ln\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

25、求由曲线 $y = e^x$ 与直线 $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积。

参考答案: $V = \pi \int_0^2 [(e^x)^2 - 1] dx = \pi (\int_0^2 e^{2x} dx - 2) = (\frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - 2) \pi = \frac{\pi}{2} (e^4 - 5)$

答案解析: 本题考查的是定积分的应用。

$$V = \pi \int_0^2 [(e^x)^2 - 1] dx = \pi (\int_0^2 e^{2x} dx - 2) = (\frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - 2) \pi = \frac{\pi}{2} (e^4 - 5)$$

26、设函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x + 3$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的凹、凸区间。

参考答案: (1) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x - 7)(x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解

得 $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. 当 $x > 7$ 或 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 7$

时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(7, +\infty)$, 单调递减区间

是 $(-1, 7)$. 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 14$; 当 $x = 7$ 时, $f(x)$

取得极小值 $f(7) = -242$ 。

(2) $f''(x) = 6x - 18$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 3$. 当 $x > 3$ 时, $f''(x) > 0$;

当 $x < 3$ 时, $f''(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的凹区间是 $(3, +\infty)$, 凸区间是 $(-\infty, 3)$.

答案解析: 本题考查的是导数的应用。

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x - 7)(x + 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解

得 $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. 当 $x > 7$ 或 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 7$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(7, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, 7)$. 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(-1) = 14$; 当 $x = 7$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(7) = -242$.

(2) $f''(x) = 6x - 18$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 3$. 当 $x > 3$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 3$ 时, $f''(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的凹区间是 $(3, +\infty)$, 凸区间是 $(-\infty, 3)$.

27、求函数 $z = x^2 - xy + y^2 + 3x + 6y$ 的极值。

参考答案: $z_x = 2x - y + 3, z_y = -x + 2y + 6$, 解 $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ 得其驻点

为 $(-4, -5)$. $z_{xx} = 2$, $z_{xy} = -1$, $z_{yy} = 2$,

$\Delta = B^2 - AC = 1 - 2 \times 2 = -3 < 0$, $z_{xx} = 2 > 0$, 故函数在 $(-4, -5)$ 取得极小

值, $z_{\text{极小值}} = -21$.

答案解析: 本题考查的是二元函数的极值. $z_x = 2x - y + 3, z_y = -x + 2y + 6$, 解

$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ 得其驻点为: $(-4, -5)$.

$z_{xx} = 2$, $z_{xy} = -1$, $z_{yy} = 2$, $\Delta = B^2 - AC = 1 - 2 \times 2 = -3 < 0$, $z_{xx} = 2 > 0$,

故函数在 $(-4, -5)$ 取得极小值, $z_{\text{极小值}} = -21$.

28、盒子中有大小相同的 3 个白球和 3 个黑球, 从盒子中任取 2 个, 记 X 为取出的白球个数。

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 $E(X)$ 。

参考答案: (1) X 的取值为 0, 1, 2

所以 X 的概率分布是

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}, \quad P(X=1)=\frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}, \quad P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$

$$(2) \quad E(X)=0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$

答案解析：本题考查的是离散型随机变量的概率分布及期望. (1) X 的取值为 0, 1, 2.

所以 X 的概率分布是：

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}, \quad P(X=1)=\frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}, \quad P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$

$$(2) \quad E(X)=0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$