

专升本高等数学一知识点汇总

函数

一、常见函数的定义域总结

1. $y = kx + b$

$y = ax^2 + bx + c$ 一般形式的定义域: $x \in R$

2. $y = \frac{k}{x}$ 分式形式的定义域: $x \neq 0$

3. $y = \sqrt{x}$ 根式的形式定义域: $x \geq 0$

4. $y = \log_a x$ 对数形式的定义域: $x > 0$

二、函数的简单性质

1. 函数的单调性

设 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于 (a, b) 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的或单调减少的。若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内严格单调增加或严格单调减少。

2. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义区间 D 关于坐标原点对称 (即若 $x \in D$, 则有 $-x \in D$)。

如果对于定义域内任意的点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数。

三、基本初等函数

(1) 常数函数 $y = c$

定义域 $(-\infty, +\infty)$, 图形是一条平行于 x 轴的直线。

(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实常数)

定义域随 μ 值的不同而不同, 不论 μ 的值是多少, 在 $(0, +\infty)$ 内总是有定义的。

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

定义域 $(-\infty, +\infty)$, 过点 $(0, 1)$ 。

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

定义域 $(0, +\infty)$ ，过点 $(1, 0)$ 。

(5) 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ ，奇函数，周期为 2π 。

余弦函数 $y = \cos x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ ，偶函数，周期为 2π 。

正切函数 $y = \tan x$ 定义域 $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的一切实数，奇函数，周期为 π 。

余切函数 $y = \cot x$ 定义域 $x \neq k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的一切实数，奇函数，周期为 π 。

(6) 反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$ ，反余弦函数 $y = \arccos x$ ，

反正切函数 $y = \arctan x$ ，反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 。

极限

一、函数极限的四则运算法则

如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ ，则

$$(1) \lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2) \lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

(3) 当 $\lim g(x) = B \neq 0$ 时，

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$$

推论 设 $\lim f_1(x), \lim f_2(x), \dots, \lim f_n(x), \lim f(x)$ 都存在， k 为常数， n 为正整数，

则有：

$$(1) \lim[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) \pm \dots \pm \lim f_n(x)$$

$$(2) \lim[kf(x)] = k \lim f(x)$$

$$(3) \lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

三、等价无穷小量

如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ ，则称 α 与 β 是等价无穷小量，记为 $\alpha \sim \beta$ 。

常用的等价无穷小量代换有：当 $x \rightarrow 0$ 时，

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, \arcsin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x$ 。

导数与微分

一、导数的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的一邻域内有定义，若自变量 x 在点 x_0 处的改变量为

Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该领域内)，函数 $y = f(x)$ 相应的有改变量

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则

称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $y'|_{x=x_0}, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$ ，即

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。此时函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导。

二、导数的运算

1. 基本初等函数的求导公式

(1) $(C)' = 0$ (C 为常数)

(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 为实数)

(3) $(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(8) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(11) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(12) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 导数的四则运算公式

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv'$$

$$(3) (ku)' = ku' \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3. 复合函数求导公式

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 且 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)。$$

三、可微与可导的等价关系

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x 处可导, 且 $A(x) = f'(x)$,

即 $dy = df(x) = f'(x) dx$ 。

由于自变量 $\Delta x = dx \neq 0$, 所以上式可写成 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 。

洛必达法则

未定型 “ $\frac{0}{0}$ ” 和未定型 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 不定式, 存在有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad (\text{或为 } \infty)$$

导数的应用

一、函数的单调性

设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 且 $y = f(x)$ 可导。

(1) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为单调增加函数。

(2) 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为单调减少函数。

二、函数的极值

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义。

如果对于该邻域内任何异于 x_0 的点 x ，恒有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值。

三、曲线的凹凸性

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导。

若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$ ，则曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的。

若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$ ，则曲线弧 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的。

四、曲线的拐点

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数 $f''(x)$ ， $x_0 \in (a, b)$ 。

若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号，那么点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，此时 $f''(x) = 0$ 。

若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

五、函数的最大值与最小值

设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义， $x_0 \in [a, b]$ ，若对于任意 $x \in [a, b]$ ，恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ （或 $f(x) \geq f(x_0)$ ），则称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值（或最小值），称点 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点（或最小值点）。

不定积分

一、不定积分的概念与性质

1. 不定积分

$f(x)$ 的原函数的全体，成为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x) dx$ 。

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有 $\int f(x) dx = F(x) + C$ ，其中 C 为任意常数。

2. 不定积分的性质

设 $f(x)$ ， $g(x)$ 都存在不定积分，则有：

$$(1) [\int f(x) dx]' = f(x) \text{ 或 } d\int f(x) dx = f(x) dx$$

$$(2) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$(3) \int [f(x) \pm \varphi(x) \pm \dots \pm \psi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx \pm \dots \pm \int \psi(x) dx$$

$$(4) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ 为常数且 } k \neq 0)$$

3. 基本积分公式

$$(1) \int 0 \cdot dx = C$$

$$(2) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(7) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

二、第一类换元积分法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 存在连续导函数, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(u) \Big|_{u=\varphi(x)} + C = F[\varphi(x)] + C。$$

常见的凑微分形式有:

$$(1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$(2) \int x^n f(x^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} \int f(x^{n+1}) d(x^{n+1}) \quad (n \neq -1)$$

$$(3) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$$

$$(4) \int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(\cos x) d(\cos x)$$

$$(5) \int e^x f(e^x) dx = \int f(e^x) d(e^x)$$

$$(6) \int a^x f(a^x) dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d(a^x)$$

$$(7) \int \frac{1}{x} f(\ln x) dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$$

$$(8) \int \frac{1}{x} f(\log_a x) dx = \ln a \int f(\log_a x) d(\log_a x)$$

$$(9) \int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$$

$$(10) \int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int f(\cot x) d(\cot x)$$

$$(11) \int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$$

$$(12) \int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$$

三、分部积分法

$$\text{公式: } \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

定积分

牛顿-莱布尼茨公式

设: (1) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)。$$

定积分的应用

一、计算平面图形的面积

如果某平面图形是由两条连续曲线 $y_1 = g(x)$, $y_2 = f(x)$ 及两条直线 $x_1 = a$, $x_2 = b$

所围成的 (其中 y_1 是下面的曲线, y_2 是上面的曲线), 则其面积可由下式求出:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx。$$

如果平面图形是由两条连续曲线 $x_1 = \varphi(y)$, $x_2 = \psi(y)$ 及两条直线 $y_1 = c$, $y_2 = d$ 所

围成的（其中 x_1 是左边的曲线， x_2 是右边的曲线），则其面积可由下式求出：

$$S = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)] dy。$$

二、计算旋转体体积

设某立体是由连续曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 和直线 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 及 x 轴所围

平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的的旋转体，则该旋转体的体积 V_x 可由下式求出：

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx。$$

若某立体是由连续曲线 $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) 和直线 $y = c$, $y = d$ ($c < d$) 及 y 轴所

围平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的的旋转体，则该旋转体的体积 V_y 可由下式求出：

$$V_y = \int_c^d \pi \varphi^2(y) dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy。$$

多元函数微分学

一、偏导数与全微分

1.偏导数的定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得改变量

Δx , ($\Delta x \neq 0$)，而 $y = y_0$ 保持不变时，得到一个改变量

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)。$$

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数

$f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$f'_x(x_0, y_0), \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } z'_x \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}。$$

2.全微分的概念

对于自变量在点 (x, y) 处的改变量 Δx , Δy ，如果函数 $z = f(x, y)$ 的全改变量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \text{ 可以表示为 } \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)。$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关，可能是 x, y 的函数， $o(\rho)$ 是比 ρ 较高阶的无穷小量

($\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$), 则称 $A\Delta x + B\Delta y$ 是函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分, 记作 $dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y$, 并称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微。

二、二元函数的极值

1. 极值的充分条件的定理

设函数 $z = f(x_0, y_0)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有连续的一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

又设 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则:

(1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值。

(2) 当 $B^2 - AC > 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处无极值。

(3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否有极值不能确定, 要用其他方法另作讨论。

2. 二元函数无条件极值的计算

(1) 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 求出所有驻点。

(2) 对于每个驻点求出对应的 A, B, C 。

(3) 由 $B^2 - AC$ 的符号判定该驻点是否为极值点。

(4) 求出极值点处的函数值, 即函数的极值。