

复习主线：极限——导数——积分

第一章 函数、极限和连续

§ 1.1 函数

一、主要内容

(一) 函数的概念

1. 函数的定义: $y=f(x)$, $x \in D$
定义域: $D(f)$, 值域: $Z(f)$.

2. 分段函数: $y = \begin{cases} f(x) & x \in D_1 \\ g(x) & x \in D_2 \end{cases}$

3. 隐函数: $F(x, y) = 0$

4. 反函数: $y=f(x) \rightarrow x=\phi(y)=f^{-1}(y)$
 $y=f^{-1}(x)$

定理:如果函数: $y=f(x)$, $D(f)=X$, $Z(f)=Y$

是严格单调增加(或减少)的;

则它必定存在反函数:

$y=f^{-1}(x)$, $D(f^{-1})=Y$, $Z(f^{-1})=X$

且也是严格单调增加(或减少)的。

(二) 函数的几何特性

1. 函数的单调性: $y=f(x)$, $x \in D$, $x_1, x_2 \in D$

当 $x_1 < x_2$ 时, 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$,

则称 $f(x)$ 在 D 内单调增加();

若 $f(x_1) \geq f(x_2)$,

则称 $f(x)$ 在 D 内单调减少();

若 $f(x_1) < f(x_2)$,

则称 $f(x)$ 在 D 内严格单调增加();

若 $f(x_1) > f(x_2)$,

则称 $f(x)$ 在 D 内严格单调减少()。

2. 函数的奇偶性: $D(f)$ 关于原点对称

偶函数: $f(-x)=f(x)$

奇函数: $f(-x)=-f(x)$

3. 函数的周期性:

周期函数: $f(x+T)=f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$

周期: T ——最小的正数

4. 函数的有界性: $|f(x)| \leq M$, $x \in (a, b)$

(三) 基本初等函数

1. 常数函数: $y=c$, (c 为常数)

2. 幂函数: $y=x^n$, (n 为实数)

3. 指数函数: $y=a^x$, ($a>0$, $a \neq 1$)

4. 对数函数: $y=\log_a x$, ($a>0$, $a \neq 1$)

5. 三角函数: $y=\sin x$, $y=\cos x$

$y=\tan x$, $y=\cot x$

$y=\sec x$, $y=\csc x$



6. 反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$

(四) 复合函数和初等函数

1. 复合函数: $y = f(u)$, $u = \phi(x)$

$y = f[\phi(x)]$, $x \in X$

2. 初等函数:

由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)和复合所构成的, 并且能用一个数学式子表示的函数

§1.2 极限

一、主要内容

(一) 极限的概念

1. 数列的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$

称数列 $\{y_n\}$ 以常数 A 为极限;

或称数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A .

定理: 若 $\{y_n\}$ 的极限存在 $\Rightarrow \{y_n\}$ 必定有界.

2. 函数的极限:

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

(2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

(3) 函数极限存在的充要条件:

$$\text{定理: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

(二) 无穷大量和无穷小量

1. 无穷大量: $\lim |f(x)| = +\infty$

称在该变化过程中 $f(x)$ 为无穷大量。

X 再某个变化过程是指:

$$x \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow x_0^-, \quad x \rightarrow x_0^+, \quad x \rightarrow x_0$$

2. 无穷小量: $\lim f(x) = 0$

称在该变化过程中 $f(x)$ 为无穷小量。

3. 无穷大量与无穷小量的关系:

定理: $\lim f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty, (f(x) \neq 0)$

4. 无穷小量的比较: $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 较高阶的无穷小量;

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c$ (c 为常数), 则称 β 与 α 同阶的无穷小量;

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小量, 记作: $\beta \sim \alpha$;

(4) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 较低阶的无穷小量。

定理: 若: $\alpha_1 \sim \beta_1, \alpha_2 \sim \beta_2$;

$$\text{则: } \lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \lim \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

三) 两面夹定理

1. 数列极限存在的判定准则:

设: $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

且: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

则: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

2. 函数极限存在的判定准则:

设: 对于点 x_0 的某个邻域内的一切点

(点 x_0 除外) 有:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

且: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

四) 极限的运算规则

若: $\lim u(x) = A, \lim v(x) = B$

则: ① $\lim[u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x) = A \pm B$

② $\lim[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x) = A \cdot B$

③ $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \frac{A}{B} \quad (\lim v(x) \neq 0)$

推论: ① $\lim[u_1(x) \pm u_2(x) \pm \dots \pm u_n(x)]$

$$= \lim u_1(x) \pm \lim u_2(x) \pm \dots \pm \lim u_n(x)$$

② $\lim[c \cdot u(x)] = c \cdot \lim u(x)$

$$\textcircled{3} \lim[u(x)]^n = [\lim u(x)]^n$$

两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{或} \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

§1.3 连续

一、主要内容

(一) 函数的连续性

1. 函数在 x_0 处连续: $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义,

$$1^\circ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{左连续: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{右连续: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

2. 函数在 x_0 处连续的必要条件:

定理: $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 处极限存在

3. 函数在 x_0 处连续的充要条件:

$$\text{定理: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

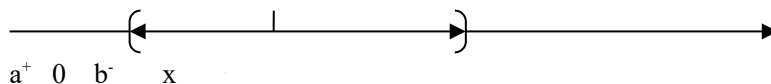
4. 函数在 $[a, b]$ 上连续:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点都连续。

在端点 a 和 b 连续是指:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{左端点右连续;}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \quad \text{右端点左连续。}$$



5. 函数的间断点:

若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

间断点有三种情况:

1° $f(x)$ 在 x_0 处无定义;

2° $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

3° $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,

但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 。

两类间断点的判断:

1° 第一类间断点:

特点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在。

可去间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在 x_0 处无定义。

2° 第二类间断点:

特点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个为 ∞ ,

或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 振荡不存在。

无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个为 ∞

⇔ 函数在 x_0 处连续的性质

1. 连续函数的四则运算:

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$

1° $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) \pm g(x_0)$

2° $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0)$

3° $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$

2. 复合函数的连续性:

$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, $y = f[\varphi(x)]$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, $\lim_{u \rightarrow \varphi(x_0)} f(u) = f[\varphi(x_0)]$

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$

3. 反函数的连续性:

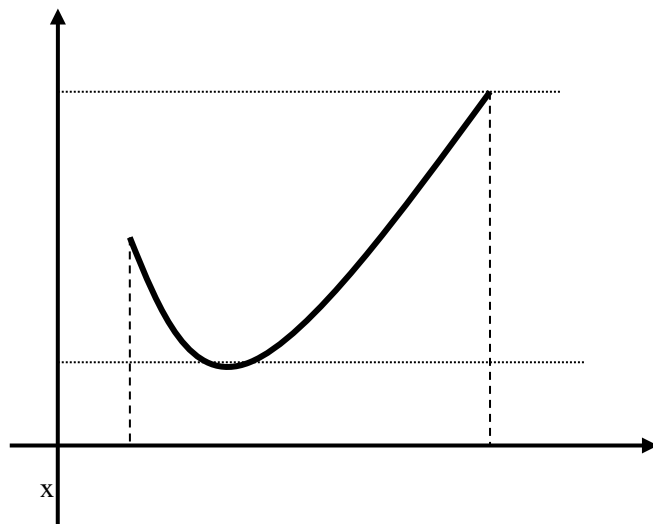
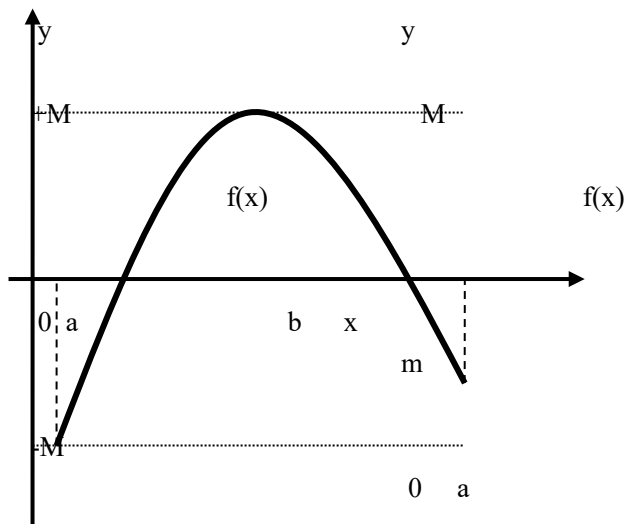
$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, $y_0 = f(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

⇔ 函数在 $[a, b]$ 上连续的性质

1. 最大值与最小值定理:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定存在最大值与最小值。



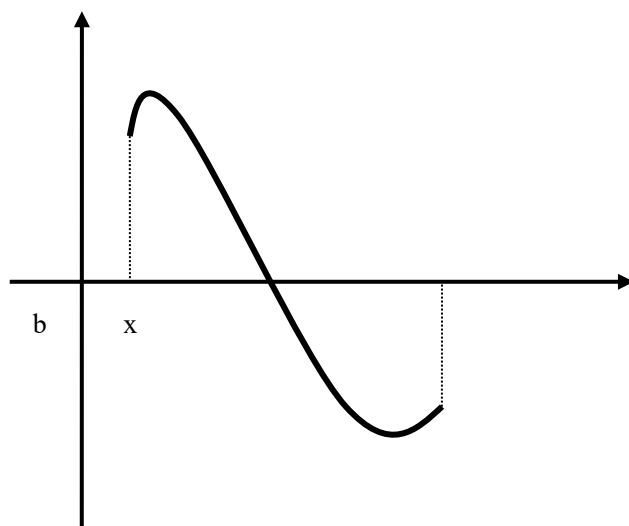
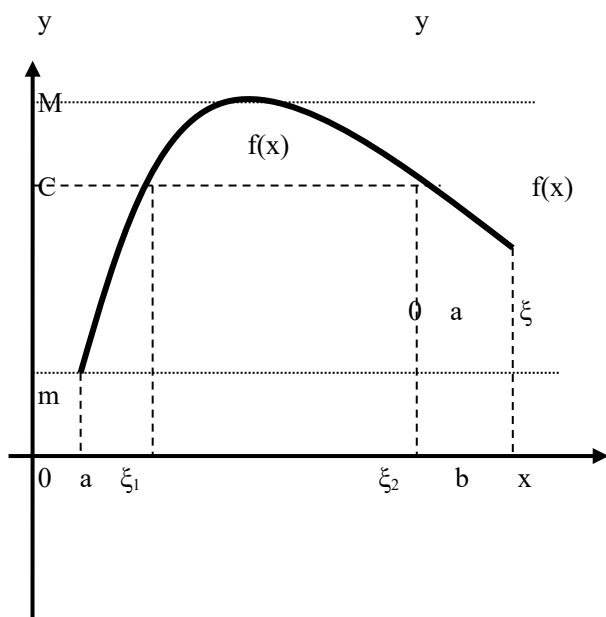
2. 有界定理:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有界。

3. 介值定理:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow$ 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得: $f(\xi) = c$,

其中: $m \leq c \leq M$



推论:

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号
 $\Rightarrow$ 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得: $f(\xi) = 0$ 。

4. 初等函数的连续性:

初等函数在其定义域区间内都是连续的。

第二章 一元函数微分学

§2.1 导数与微分

一、主要内容

(一) 导数的概念

1. 导数: $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

$$2. \text{ 左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

定理: $f(x)$ 在 x_0 的左 (或右) 邻域上连续在

其内可导, 且极限存在;

$$\text{则: } f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

$$(\text{或: } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x))$$

3. 函数可导的必要条件:

定理: $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续

4. 函数可导的充要条件:

$$\text{定理: } y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \text{ 存在} \Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0),$$

且存在。

$$5. \text{ 导函数: } y' = f'(x), \quad x \in (a, b)$$

$f(x)$ 在 (a, b) 内处处可导。 y $f'(x_0)$ $f(x)$

6. 导数的几何性质: Δy

$f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上点 Δx

$M(x_0, y_0)$ 处切线的斜率。 O x_0 x

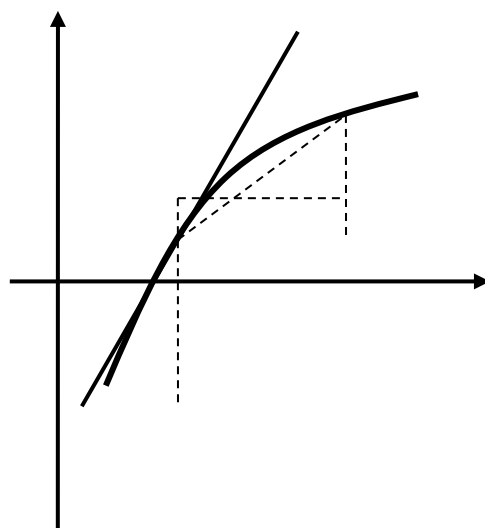
(二) 求导法则

1. 基本求导公式:

2. 导数的四则运算:

$$1^\circ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2^\circ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$



$$3^{\circ} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数的导数:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x), \quad y = f[\varphi(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{或} \quad y' = y'_u \cdot u'_x$$

☆注意 y'_u 与 $f'[\varphi(x)]$ 的区别:

y'_u 表示复合函数对自变量 u 求导;

$f'[\varphi(x)]$ 表示复合函数对中间变量 $\varphi(x)$ 求导。

4. 高阶导数: $f''(x)$, $f'''(x)$, 或 $f^{(3)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

函数的 n 阶导数等于其 $n-1$ 阶导数的导数。

三、微分的概念

1. 微分: $f(x)$ 在 x 的某个邻域内有定义,

$$\Delta y = A(\Delta x) + o(\Delta x)$$

其中: $A(\Delta x)$ 与 Δx 无关, $o(\Delta x)$ 是比 Δx 较高

阶的无穷小量, 即: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

则称 $y = f(x)$ 在 x 处可微, 记作:

$$dy = A(\Delta x)$$

$$dy = A(x)dx \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

2. 导数与微分的等价关系:

定理: $f(x)$ 在 x 处可微 $\Rightarrow f(x)$ 在 x 处可导,

且: $f'(x) = A(x)$

3. 微分形式不变性:

$$dy = f'(u)du$$

不论 u 是自变量, 还是中间变量, 函数的微分 dy 都具有相同的形式。

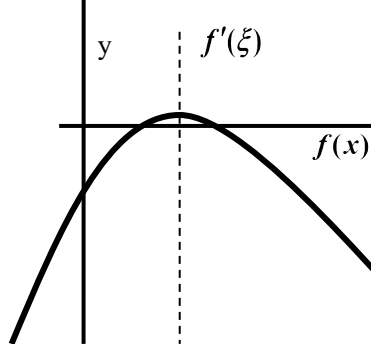
§2.2 中值定理及导数的应用

一、主要内容

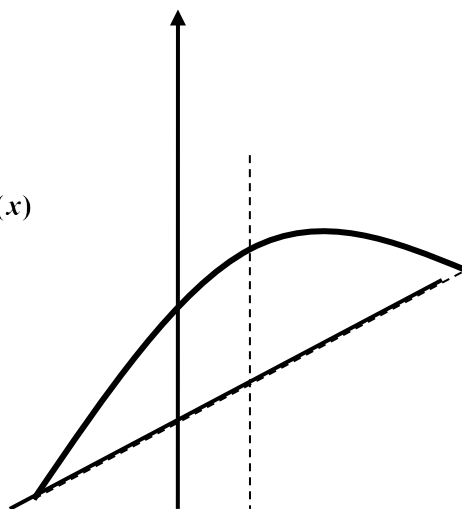
(一) 中值定理

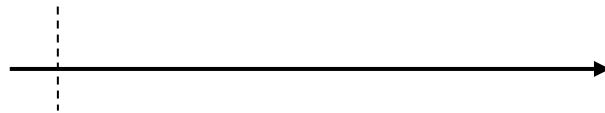
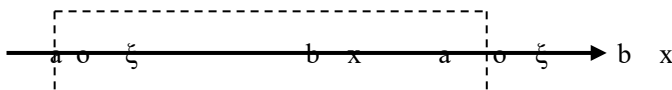
1. 罗尔定理: $f(x)$ 满足条件:

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续;} \\ 2^{\circ} \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导;} \\ 3^{\circ} f(a) = f(b). \end{array} \right\} \Rightarrow \text{在 } (a, b) \text{ 内至少存在一点 } \xi, \text{ 使得 } f'(\xi) = 0.$$



$$f'(\xi) = f(x)$$





2. 拉格朗日定理: $f(x)$ 满足条件:

$$\left. \begin{array}{l} 1^0 \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续,} \\ 2^0 \text{ 在 } (a, b) \text{ 内可导;} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{在 } (a, b) \text{ 内至少存} \\ \text{在一点 } \xi, \text{ 使得:} \\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}$$

(二) 罗必塔法则: $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right)$ 型未定式

定理: $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (\text{或 } \infty) \\ 1^0 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (\text{或 } \infty); \end{array}$$

2° 在点 a 的某个邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

$$3^0 \lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad (\text{或 } \infty)$$

$$\text{则: } \lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad (\text{或 } \infty)$$

☆注意: 1° 法则的意义: 把函数之比的极限化成了它们导数之比的极限。

2° 若不满足法则的条件, 不能使用法则。

即不是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型时, 不可求导。

3° 应用法则时, 要分别对分子、分母求导, 而不是对整个分式求导。

4° 若 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 还满足法则的条件,

可以继续使用法则, 即:

$$\lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{f''(x)}{g''(x)} = A \quad (\text{或 } \infty)$$

5° 若函数是 $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 型可采用代数变

形, 化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型; 若是 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型可

采用对数或指数变形, 化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

(三) 导数的应用

1. 切线方程和法线方程:

设: $y = f(x), \quad M(x_0, y_0)$

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$

2. 曲线的单调性:

(1) $f'(x) \geq 0 \quad x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加;

$f'(x) \leq 0 \quad x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少;

(2) $f'(x) > 0 \quad x \in (a, b) \Rightarrow$ 在 (a, b) 内严格单调增加;

$f'(x) < 0 \quad x \in (a, b) \Rightarrow$ 在 (a, b) 内严格单调减少。

3. 函数的极值:

(1) 极值的定义:

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, x_0 是 (a, b) 内的一点;

若对于 x_0 的某个邻域内的任意点 $x \neq x_0$, 都有:

$f(x_0) \geq f(x)$ [或 $f(x_0) \leq f(x)$]

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值),

称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点)。

(2) 极值存在的必要条件:

定理:
$$\left. \begin{array}{l} 1^0. f(x) \text{ 存在极值 } f(x_0) \\ 2^0. f'(x_0) \text{ 存在。} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

x_0 称为 $f(x)$ 的驻点

(3) 极值存在的充分条件:

定理一:

$$\left. \begin{array}{l} 1^0. f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续;} \\ 2^0. f'(x_0) = 0 \text{ 或 } f'(x_0) \text{ 不存在;} \\ 3^0. f'(x) \text{ 过 } x_0 \text{ 时变号。} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_0) \text{ 是极值;} \\ x_0 \text{ 是极值点。} \end{array}$$

当 x 渐增通过 x_0 时, $f(x)$ 由 (+) 变 (-);

则 $f(x_0)$ 为极大值;

当 x 渐增通过 x_0 时, $f(x)$ 由 (-) 变 (+); 则 $f(x_0)$ 为极小值。

定理二:
$$\left. \begin{array}{l} 1^0. f'(x_0) = 0; \\ 2^0. f''(x_0) \text{ 存在。} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_0) \text{ 是极值;} \\ x_0 \text{ 是极值点。} \end{array}$$

若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值。

☆注意: 驻点不一定是极值点, 极值点也不一定是驻点。

4. 曲线的凹向及拐点:

(1) 若 $f''(x) > 0, x \in (a, b)$; 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是上凹的 (或凹的), $(\cup)$;

(2) 若 $f''(x) < 0, x \in (a, b)$; 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是下凹的 (或凸的), $(\cap)$;

(3) $\left. \begin{array}{l} 1^0. f''(x_0) = 0, \\ 2^0. f''(x) \text{ 过 } x_0 \text{ 时变号。} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ 称为 } f(x) \text{ 的拐点。}$

5. 曲线的渐近线:

(1) 水平渐近线:

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$
或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ $\Rightarrow y = A$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线。

(2) 铅直渐近线:

若 $\lim_{x \rightarrow C^-} f(x) = \infty$
或 $\lim_{x \rightarrow C^+} f(x) = \infty$ $\Rightarrow x = C$ 是 $f(x)$ 的铅直渐近线。

第三章 一元函数积分学

§3.1 不定积分

一、主要内容

(一) 重要的概念及性质:

1. 原函数: 设: $f(x), F(x), x \in D$

若: $F'(x) = f(x)$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,

并称 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的所有原函数,

其中 C 是任意常数。

2. 不定积分:

函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体,

称为函数 $f(x)$ 的不定积分; 记作:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

其中: $f(x)$ 称为被积函数;

$f(x)dx$ 称为被积表达式;

x 称为积分变量。

3. 不定积分的性质:

$$(1) \left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

$$\text{或: } d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$$

$$(2) \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\text{或: } \int df(x) = f(x) + C$$

$$(3) \int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] dx \\ = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx$$

—分项积分法

$$(4) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ 为非零常数})$$

4. 基本积分公式:

(一) 换元积分法:

1. 第一换元法: (又称“凑微元”法)

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{凑微元}}}{=} \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{令 } t = \varphi(x)}}{=} \int f(t) dt = F(t) + C$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{回代 } t = \varphi(x)}}{=} F[\varphi(x)] + C$$

常用的凑微元函数有:

$$1^\circ dx = \frac{1}{a} d(ax) = \frac{1}{a} d(ax + b) \quad (a, b \text{ 为常数, } a \neq 0)$$

$$2^\circ x^m dx = \frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{a(m+1)} d(ax^{m+1} + b) \\ (m \text{ 为常数})$$

$$3^\circ e^x dx = d(e^x) = \frac{1}{a} d(ae^x + b)$$

$$a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x), \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4^\circ \frac{1}{x} dx = d(\ln x)$$

$$5^\circ \sin x dx = -d(\cos x) \quad \cos x dx = d(\sin x)$$

$$\sec^2 x dx = d(\tan x) \quad \csc^2 x dx = -d(\cot x)$$

$$6^\circ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} dx = d(\arctan x) = -d(\operatorname{arccot} x)$$

2. 第二换元法:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{令 } x=\varphi(t)}}{=} \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) \\ &= \int \varphi'(t)f[\varphi(t)]dx = F(t) + C \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{反代 } t=\varphi^{-1}(x)}}{=} F[\varphi^{-1}(x)] + C\end{aligned}$$

第二换元法主要是针对含有根式的被积函数，其作用是将根式有理化。

一般有以下几种代换：

1° $x = t^n$, n 为偶数时, $t > 0$

(当被积函数中有 $\sqrt[n]{x}$ 时)

2° $x = a \sin t$, (或 $x = a \cos x$), $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

(当被积函数中有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 时)

3° $x = a \tan t$, (或 $x = a \cot t$), $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, ($0 < t \leq \frac{\pi}{2}$)

(当被积函数中有 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 时)

4° $x = a \sec t$, (或 $x = a \csc t$), $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, ($0 < t \leq \frac{\pi}{2}$)

(当被积函数中有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时)

(三)分部积分法：

1. 分部积分公式：

$$\begin{aligned}\int u dv &= u \cdot v - \int v du \\ \int \stackrel{\uparrow}{u \cdot v'} dx &= u \cdot v - \int \stackrel{\downarrow}{u' \cdot v} dx\end{aligned}$$

2. 分部积分法主要针对的类型：

(1) $\int P(x) \sin x dx$, $\int P(x) \cos x dx$

(2) $\int P(x) e^x dx$

(3) $\int P(x) \ln x dx$

(4) $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$

$\int P(x) \arctan x dx$, $\int P(x) \operatorname{arccot} x dx$

(5) $\int e^{ax} \sin b x dx$, $\int e^{ax} \cos b x dx$

其中： $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ (多项式)

3.选u规律:

- (1)在三角函数乘多项式中, 令 $P(x) = u$,
其余记作 dv ;简称“三多选多”。
- (2)在指数函数乘多项式中, 令 $P(x) = u$,
其余记作 dv ;简称“指多选多”。
- (3)在多项式乘对数函数中, 令 $\ln x = u$,
其余记作 dv ;简称“多对选对”。
- (4)在多项式乘反三角函数中, 选反三角函数
为 u , 其余记作 dv ;简称“多反选反”。
- (5)在指数函数乘三角函数中, 可任选一函数
为 u , 其余记作 dv ;简称“指三任选”。

(四)简单有理函数积分:

1. 有理函数: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式。

2. 简单有理函数:

$$(1) f(x) = \frac{P(x)}{1+x}, \quad f(x) = \frac{P(x)}{1+x^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{P(x)}{(x+a)(x+b)}$$

$$(3) f(x) = \frac{P(x)}{(x+a)^2 + b}$$

§3.2 定积分

$f(x)$

一. 主要内容

(一).重要概念与性质

1. 定积分的定义:

$O \quad a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_{i-1} \quad \xi_i \quad x_i \quad x_{n-1} \quad b \quad x$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

定积分含四步: 分割、近似、求和、取极限。

定积分的几何意义: 是介于 x 轴, 曲线 $y=f(x)$,
直线 $x=a, x=b$ 之间各部分面积的代数和。

x 轴上方的面积取正号,

y

x 轴下方的面积取负号。

$+$ $+$

$a \quad 0 \quad - \quad b \quad x$

2. 定积分存在定理:

设: $y = f(x) \quad x \in [a, b]$

若: $f(x)$ 满足下列条件之一:

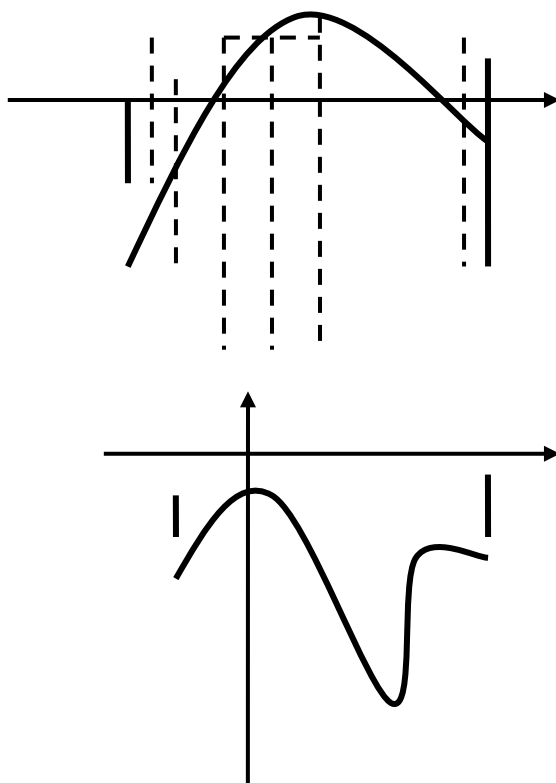
1°. $f(x)$ 连续, $x \in [a, b]$

2°. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有有限个第一类间断点;

3°. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界;

则: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。

若积分存在, 则积分值与以下因素无关:



- 1° 与积分变量形式无关, 即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$;
 2° 与在 $[a, b]$ 上的划分无关, 即 $[a, b]$ 可以任意划分;
 3° 与点 ξ_i 的选取无关, 即 ξ_i 可以在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取。
 积分值仅与被积函数 $f(x)$ 与区间 $[a, b]$ 有关。

3. 牛顿——莱布尼兹公式:

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任意一个原函数:

$$\text{则: } \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

*牛顿——莱布尼兹公式是积分学中的核心定理,

其作用是将一个求曲边面积值的问题转化为寻找原函数及计算差量的问题。

4. 原函数存在定理:

若 $f(x)$ 连续, $x \in [a, b]$,

$$\text{则: } \varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数,

$$\text{且: } \varphi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$$

5. 定积分的性质:

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则:

$$1^\circ \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

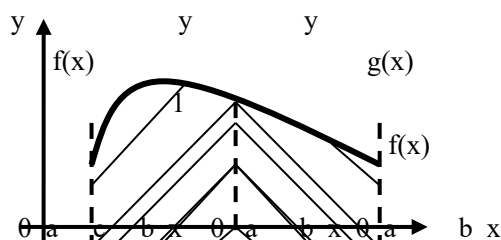
$$2^\circ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3^\circ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$4^\circ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$5^\circ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$$

$$6^\circ \int_a^b 1dx = b - a$$



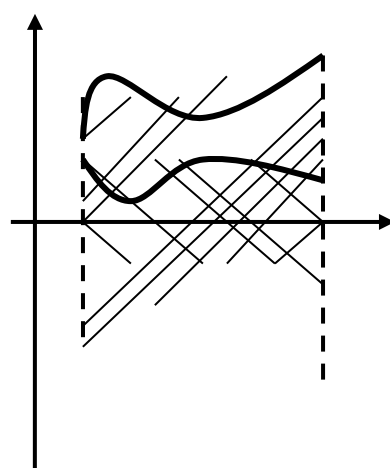
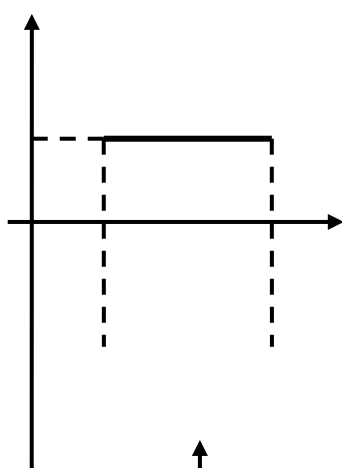
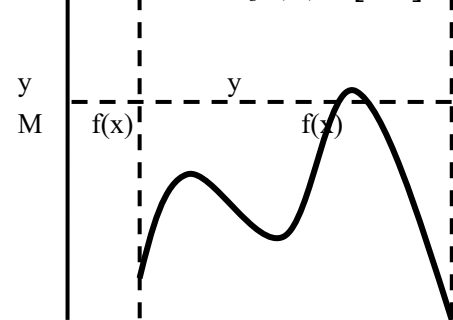
$$7^\circ f(x) \leq g(x), \quad \{a \leq x \leq b\}$$

$$\text{则 } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

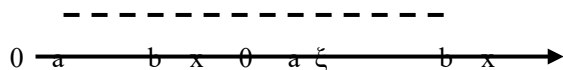
8° 估值定理:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值。



m



9° 积分中值定理:

若 $f(x)$ 连续 $x \in [a, b]$, 则: 必存在一点 $\xi \in [a, b]$,

$$\text{使 } \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

(二) 定积分的计算:

1. 换元积分

设 $f(x)$ 连续, $x \in [a, b]$, $x = \varphi(t)$

若 $\varphi'(t)$ 连续, $t \in [\alpha, \beta]$,

且当 t 从 α 变到 β 时, $\varphi(t)$ 单调地从 a 变到 b ,

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$$

$$\text{则: } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

2. 分部积分

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

3. 广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

4. 定积分的导数公式

$$1^\circ \left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x)$$

$$2^\circ \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]'_x = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$3^\circ \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right]'_x = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x) \quad \text{(三) 定积分的应用}$$

1. 平面图形的面积:

1° 由 $y = f(x) > 0$, $x = a$, $x = b$, $(a < b)$

与 x 轴所围成的图形的面积 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b f(x) dx$$

2° 由 $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $(f > g)$

与 $x = a, x = b$ 所围成的图形的面积

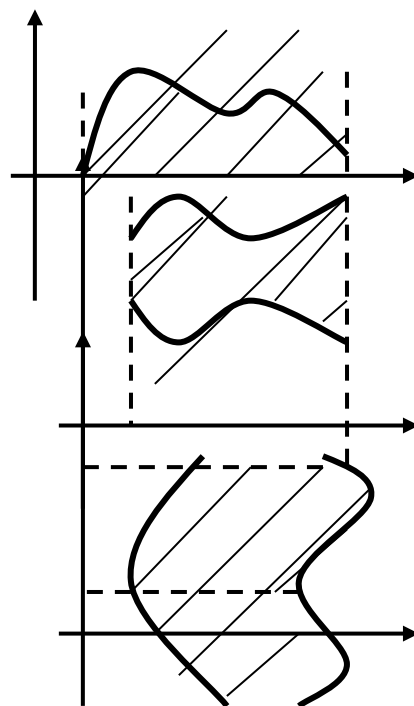
$$s = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

3° 由 $x_1 = \phi(y)$, $x_2 = \varphi(y)$, $(\phi > \varphi)$

与 $y = c, y = d$ 所围成的图形的面积

$$s = \int_c^d [\phi(y) - \varphi(y)] dy$$

4° 求平面图形面积的步骤:



- ①. 求出曲线的交点，画出草图；
 - ②. 确定积分变量，由交点确定积分上下限；
 - ③. 应用公式写出积分式，并进行计算。
2. 旋转体的体积

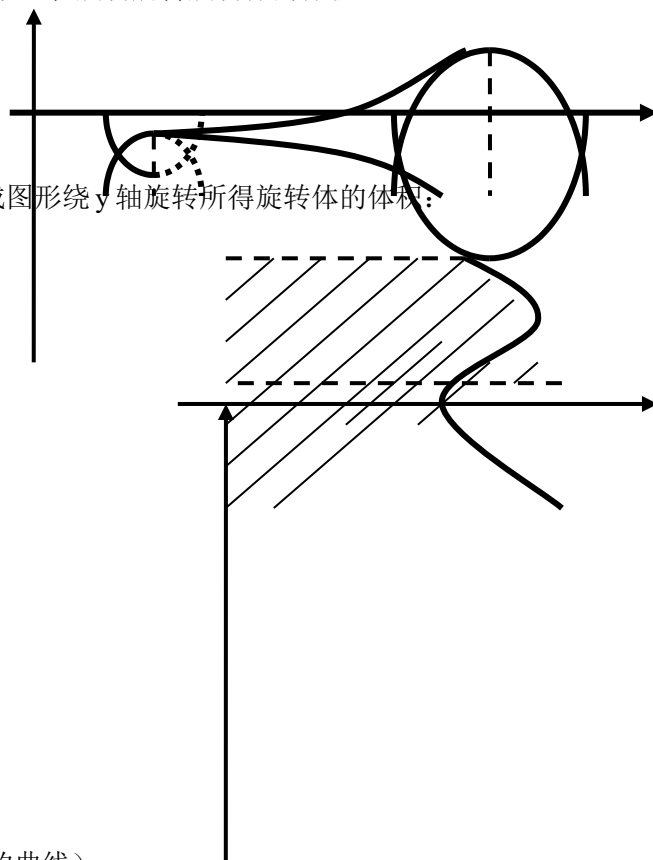
1° 曲线 $y = f(x) > 0$, 与 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积：

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

0 a b x

2° 由曲线 $x = \phi(y) > 0$, 与 $y = c, y = d$ 及 y 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积：

$$V_y = \pi \int_c^d \phi^2(y) dy$$



第四章 多元函数微积分初步

§4.1 偏导数与全微分

一. 主要内容：

- ①. 多元函数的概念
3. 二元函数的定义：

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

定义域： $D(f)$

4. 二元函数的几何意义：

二元函数是一个空间曲面。（而一元函数是平面上的曲线）

- ②. 二元函数的极限和连续：

1. 极限定义：设 $z=f(x,y)$ 满足条件：

1° 在点 (x_0, y_0) 的某个领域内有定义。

（点 (x_0, y_0) 可除外）

$$2^\circ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

则称 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 极限存在，且等于 A 。

2. 连续定义：设 $z=f(x,y)$ 满足条件：

1° 在点 (x_0, y_0) 的某个领域内有定义。

$$2^\circ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续。

(三). 偏导数：

定义： $f(x, y)$, 在 (x_0, y_0) 点

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 分别为函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x, y 的偏导数。

$z = f(x, y)$ 在 D 内任意点 (x, y) 处的偏导数记为:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$$

(四).全微分:

1. 定义: $z = f(x, y)$

若 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中, A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, $o(\rho)$ 是比

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 较高阶的无穷小量。

则: $dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y$

是 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分。

3. 全微分与偏导数的关系

定理: 若 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 连续, $(x, y) \in D$.

则: $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微且

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

(五).复全函数的偏导数:

1. 设: $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$

$$\therefore z = f[u(x, y), v(x, y)]$$

$$\text{则: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 设 $y = f(u, v), u = u(x), v = v(x)$

$$\therefore y = f[u(x), v(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

(六).隐含数的偏导数:

1. 设 $F(x, y, z) = 0, z = f(x, y)$, 且 $F'_z \neq 0$

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

2. 设 $F(x, y) = 0, y = f(x)$, 且 $F'_y \neq 0$

$$\text{则 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

(七). 二阶偏导数:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

结论: 当 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 为 x, y 的连续函数时, 则: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

(八). 二元函数的无条件极值

1. 二元函数极值定义:

设 $z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 某一个邻域内有定义,

若 $z(x, y) \leq z(x_0, y_0)$, [或 $z(x, y) \geq z(x_0, y_0)$]

则称 $z(x_0, y_0)$ 是 $z(x, y)$ 的一个极大(或极小)值,

称 (x_0, y_0) 是 $z(x, y)$ 的一个极大(或极小)值点。

☆ 极大值和极小值统称为极值,
极大值点和极小值点统称为极值点。

2. 极值的必要条件:

若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极值, 且在 (x_0, y_0)

两个一阶偏导数存在, 则:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

★ 1° 使 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) ,

称为 $z = f(x, y)$ 的驻点。

2° 定理的结论是极值存在的必要条件,

而非充分条件。

例: $z = y^2 - x^2 + 1$

$$\begin{cases} z'_x = -2x = 0 \\ z'_y = +2y = 0 \end{cases} \text{ 解出驻点 } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$z(0,0) = 1$$

$$\text{当 } x = 0, y \neq 0 \text{ 时, } z(0,y) = y^2 + 1 > 1$$

$$\text{当 } x \neq 0, y = 0 \text{ 时, } z(x,0) = -x^2 + 1 < 1$$

$\therefore$ 驻点不一定是极值点。

5. 极值的充分条件:

设: 函数 $y = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个领域内

有二阶偏导数, 且 (x_0, y_0) 为驻点,

$$\text{若: } p = [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$$

当: $p < 0$ 且 $\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ 时, } \Rightarrow f(x_0, y_0) \text{ 为极大值。} \\ f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ 时, } \Rightarrow f(x_0, y_0) \text{ 为极小值。} \end{cases}$ 当: $p > 0, \Rightarrow f(x_0, y_0)$ 不是极值。

当: $p = 0, \Rightarrow$ 不能确定。

求二元极值的方法:

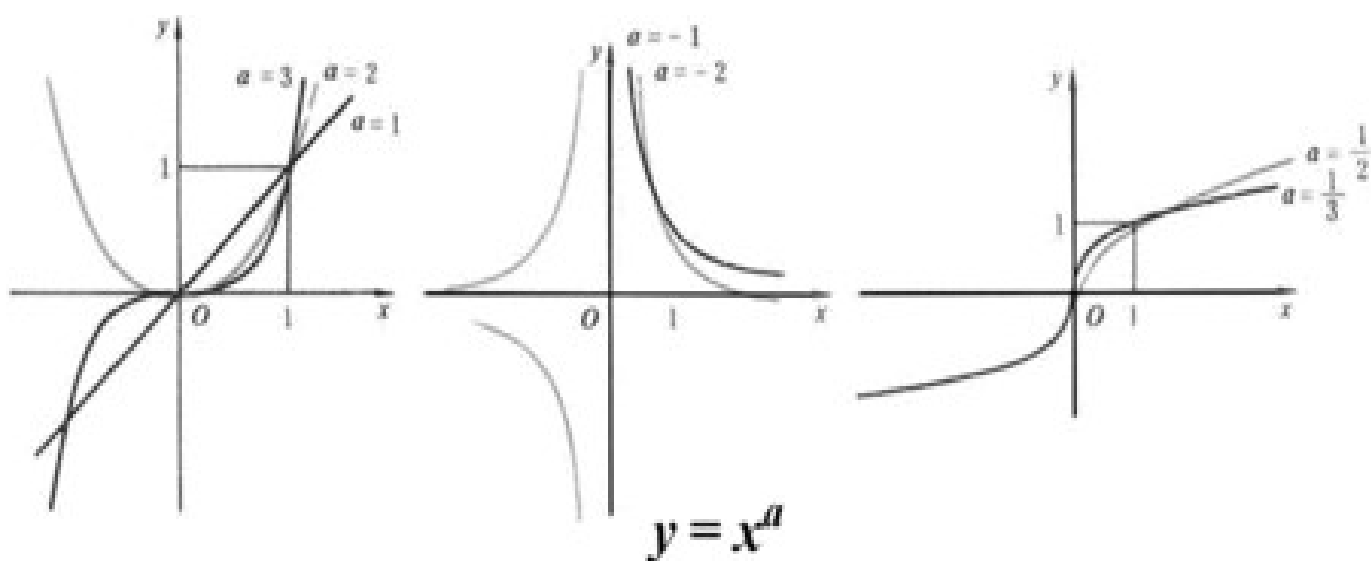
1° 求一阶偏导数, 令两个一阶偏导数等于零,

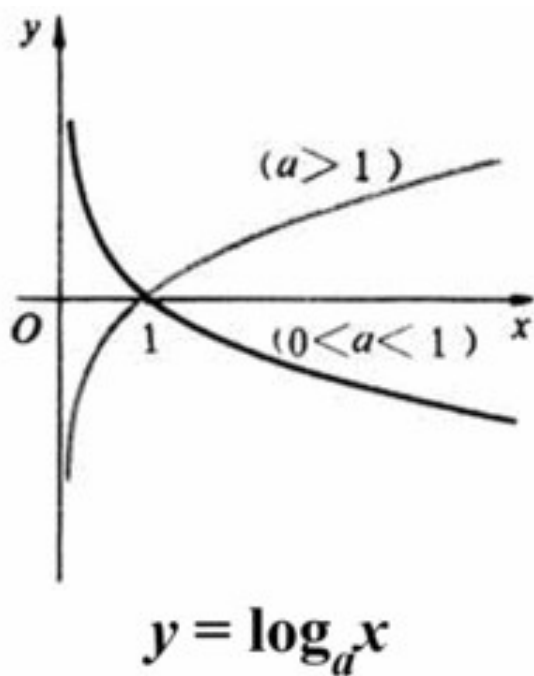
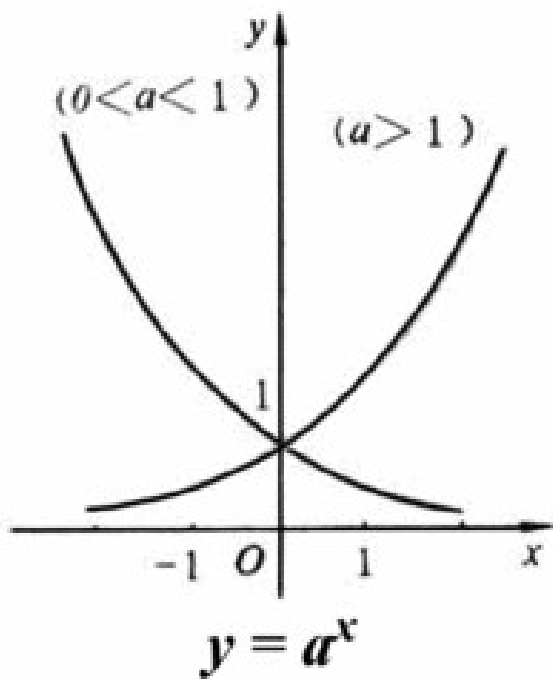
解出驻点。

2° 求出 p , 根据极值的充分条件, 判断驻点是否是

极值点。

3° 若驻点是极值点, 求出极值。





二倍角公式: (含万能公式)

$$\textcircled{1} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\textcircled{2} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\textcircled{3} \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} \quad \textcircled{4} \sin^2 \theta = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \textcircled{5} \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

