

成人高考专升本《高等数学（二）》考前模拟卷

第 I 卷

一、选择题(1-10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ ()

- A. -1
- B. 1
- C. 2
- D. 3

2. 函数 $y = x + \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内 ()

- A. 单调增加
- B. 单调减少
- C. 不单调
- D. 不连续

3. 设 $\int f(x)dx = x^2 + C$ ，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x dx =$ ()

- A. 1
- B. -1
- C. $\frac{\pi^2}{4}$
- D. $-\frac{\pi^2}{4}$

4. 设在 (a, b) 内有 $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$ ，则在 (a, b) 内必有 ()

- A. $f(x) - g(x) = 0$
- B. $f(x) - g(x) = C$

C. $df(x) \neq dg(x)$

D. $f(x)dx = g(x)dx$

5. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 1$, 则 $f'(x_0) =$ ()

A. 1

B. 0

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt =$ ()

A. $2x \cos x^4$

B. $x^2 \cos x^4$

C. $2x \sin x^4$

D. $x^2 \sin x^4$

7. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 是 $1-\sqrt{x}$ 的 ()

A. 高阶无穷小

B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小

D. 不可比较

8. 曲线 $y e^x + \ln y = 1$, 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 ()

A. $y - 1 = -\frac{x}{2}$

B. $y = -\frac{1}{2}(x - 1)$

C. $y-1=-\frac{x}{3}$

D. $y-1=-\frac{x}{4}$

9. 曲线 $y=3x^2-x^3$ 的凸区间为 ()

A. $(-\infty,1)$

B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$

D. $(0,+\infty)$

10. 事件 A, B 满足 $AB=A$, 则 A 与 B 的关系为 ()

A. $A=B$

B. $A \subset B$

C. $A \supset B$

D. $A=\bar{B}$

第 II 卷

二、填空题(11-20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. $y = \frac{1}{1+\tan x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 $y = \sin x$, 则 $y^{(10)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $y = y(x)$ 由方程 $xy = e^{y-x}$ 确定, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 已知 $\int k \tan 2x dx = \frac{2}{3} \ln |\cos 2x| + C$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx =$ _____.

18. 设 $z = \arctan \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

19. 设 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____.

20. $\int_e^{e^2} \ln x dx =$ _____.

三、解答题 (21-28 题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设 $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$, 求 dy .

22. (本题满分 8 分)

设 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 均为 $y = a \ln x + b x^2 + 3x$ 的极值点, 求 a , b .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

24. (本题满分 8 分)

设 $z = \ln(x^2 - y^2)$, 其中 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

25. (本题满分 8 分)

某运动员投篮命中率为 0.3, 求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

26. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

27. (本题满分 10 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t \sin t dt}{x^6}$.

28. (本题满分 10 分)

适用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0$.

成人高考专升本《高等数学(二)》考前模拟卷参考答案

一、选择题

1. 【答案】C

【解析】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既左连续又右连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 = f(0) = a, \text{ 故 } a=2.$$

2. 【答案】A

【解析】由 $y = x + \cos x$, 所以 $y' = 1 - \sin x \geq 0 (0 < x < 2\pi)$, 故 y 在 $(0, 2\pi)$ 内单调增加。

3. 【答案】B

【解析】由 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 知

$$\begin{aligned} \int f(-\sin x) \cos x dx &= \int f(-\sin x) d \sin x \\ &= -\int f(-\sin x) d(-\sin x) = -(-\sin x)^2 + C \\ &= -\sin^2 x + C \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x) \cos x dx = -\sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

4. 【答案】B

【解析】由 $\int f'(x) dx = \int g'(x) dx$, 得 $\int [f'(x) - g'(x)] dx = 0$, 即 $f'(x) - g'(x) = 0$, 又

$$\int [f'(x) - g'(x)] dx = \int 0 dx = 0, \text{ 故 } f(x) - g(x) - C = 0, \text{ 所以 } f(x) - g(x) = C.$$

5. 【答案】D

【解析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 1$ 与 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 相比较, 可得

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. 【答案】C

【解析】 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt = \sin(x^2)^2 \cdot (x^2)' = 2x \sin x^4.$

7. 【答案】C

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小。

8. 【答案】A

【解析】 由 $y e^x + \ln y = 1$, 两边对 x 求导得 $y' e^x + y e^x + \frac{1}{y} \cdot y' = 0$, 即 $y' = \frac{-y e^x}{e^x + \frac{1}{y}}$, 所

以 $y'|_{(0,1)} = -\frac{1}{2}$, 故切线方程为 $y-1 = -\frac{x}{2}$.

9. 【答案】B

【解析】 $y = 3x^2 - x^3$, $y' = 6x - 3x^2$, $y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$, 显然当 $x > 1$ 时, $y'' < 0$;

而当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故在 $(1, +\infty)$ 内曲线为凸弧。

10. 【答案】B

【解析】 $AB=A$, 则 $A \subset AB (AB \subset A, \text{按积的定义是当然的})$, 即当 $\omega \in A$ 时, 必有 $\omega \in AB$, 因而 $\omega \in B$, 故 $A \subset B$.

二、填空题

11. 【答案】 e^2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2} \right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2} \right)^{x^2}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$

12. 【答案】1

【解析】 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1} = 1$

13. 【答案】 $-\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$

【解析】 $y = \frac{1}{1 + \tan x}$, 则

$$y' = \frac{-\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} = \frac{-\sec^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

14. 【答案】 $-\sin x$

【解析】 由 $y = \sin x$, 且 $y^n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$, 则

$$y^{(10)} = \sin\left(10 \times \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(5\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

15. 【答案】 $\frac{y + e^{y-x}}{e^{y-x} - x} dx$

【解析】 方程 $xy = e^{y-x}$ 两边对 x 求导, y 为 x 的函数, 有 $y + xy' = e^{y-x} \cdot (y' - 1)$

$$\text{解得 } dy = \frac{y + e^{y-x}}{e^{y-x} - x} dx$$

16. 【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】 $\int k \tan 2x dx = k \int \frac{2 \sin x}{\cos 2x} dx = \frac{k}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} d(2x) = \frac{-k}{2} \int \frac{d \cos 2x}{\cos 2x}$
 $= \frac{-k}{2} \cdot \ln |\cos 2x| + C$, 与 $\frac{2}{3} \cdot \ln |\cos 2x| + C$ 比较, 得 $k = -\frac{4}{3}$.

17. 【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} \right]_2^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{8}.$

18. 【答案】 $-\frac{1}{2(x+y)} \sqrt{\frac{y}{x}}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{2(x+y)} \sqrt{\frac{y}{x}}$

19. 【答案】 $-e^{\sin x} \cos x \sin y$

【解析】由 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\sin x} \sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{\sin x} \cos x \sin y$

20. 【答案】 e^2

【解析】 $\int_e^{e^2} \ln x dx = x \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = 2e^2 - e - x \Big|_e^{e^2} = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$

三、解答题

由 $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \tan x$, 两边对 x 求

导有

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln \tan x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\tan x} \sec^2 x,$$

$$\text{所以 } y' = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right),$$

$$\text{故 } dy = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sec^2 x}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right) dx.$$

21. 【答案】

22. 【答案】由 $y = a \ln x + b x^2 + 3x$, 则 $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 3$, 因为 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 是极值点,

$$\text{所以 } y'|_{x=1} = 0, y'|_{x=2} = 0, \text{ 即 } \begin{cases} a + 2b + 3 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b + 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -2, b = -\frac{1}{2}$.

$$23. \text{【答案】 } \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} d e^x = \int \frac{e^x + 1 - 1}{1+e^x} d e^x$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+e^x} \right) d e^x$$

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

另解,令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx &= \int \frac{t^2}{(1+t)t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt \\&= \int \frac{t+1-1}{1+t} dt \\&= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\&= t - \ln(1+t) + C \\&= e^x - \ln(1+e^x) + C.\end{aligned}$$

24. 【答案】

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot \frac{dy}{dx} = \\&= \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2y \cdot e^x}{x^2 - y^2} = \frac{2x - 2e^{2x}}{x^2 - e^{2x}}.\end{aligned}$$

25. 【答案】

这次投篮的投中次数是随机变量, 设其为 X , 它可能取的值为 $0, 1$, $X = 0$ 表示投中 0 次, 即投篮未中, $P\{X = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7$; $X = 1$ 表示投中一次, $P\{X = 1\} = 0.3$, 故概率分布为

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 0.7 & 0.3 \end{array},$$

$$\text{分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.7, & 0 \leq x < 1, \\ 0.7 + 0.3 = 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

26. 【答案】

令 $\int_0^1 f(t) dt = c$, 则由题设知 $f(x) = x + 2c$,

$$\text{所以 } c = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2c) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 +$$

$$2c = \frac{1}{2} + 2c,$$

故 $c = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = x - 1$.

27. 【答案】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t \sin t dt}{x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin x^2 \cdot 2x}{6x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \sin x^2}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cdot x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

28. 【答案】

$$\text{由 } \sqrt{3} \leq \sqrt{3+x} \leq 2 \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{则 } \sqrt{3} \cdot x^n \leq \sqrt{3+x} \cdot x^n \leq 2x^n.$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \int_0^1 x^n dx,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1},$$

$$\text{即 } 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 0.$$

$$\text{故由夹逼定理得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0.$$