

第四章 函数

本章要求

- (1) 理解函数的概念，会求定义域
- (2) 会判断函数的单调性和奇偶性
- (3) 理解一次函数的图像和性质，会求解析式
- (4) 理解二次函数的图像、性质，会求最大值和最小值，解决其他问题
- (5) 会画常见函数的图像
- (6) 会求反函数

内容提要

一、求函数的定义域

- 1 分式的分母不等于0
- 2 平方根的底数 ≥ 0
- 3 对数的真数 > 0

二、函数性质的判定

1 函数的单调性

如果 $a < b \rightarrow f(a) < f(b)$, 那么单调递增

如果 $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$, 那么单调递减

2 函数的奇偶性

如果 $f(-x) = f(x)$, 那么是偶函数, 图像关于 y 轴对称

如果 $f(-x) = -f(x)$, 那么是奇函数, 图像关于原点对称

三、一次函数

$y = kx + b$; 其中 k; 斜率; b; 截距

四、二次函数; 图像是抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

其中 $a > 0$, 开口向上; $a < 0$, 开口向下

与 y 轴的交点是 $(0, c)$

利用配方法求最值, 对称轴, 顶点坐标

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

最值 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y = -\frac{b^2}{4a} + c$

对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$

顶点坐标 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c)$

五、会画一些常见函数的图像

例题 1 下列函数在 $(0, +\infty)$ 内是增函数 【2018 年真题】

A. $y = x^{-1}$; B. $y = \sin x$

C. $y = x^2$; D. $y = 3^{-x}$

【答案】C

【解析】根据函数的图像判断

例题 2 下列函数中，图像是中心对称图形【2018 年真题】

A. $y = x^{-2}$; B. $y = 2^{-x}$

C. $y = x^{-1} - 1$; D. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

【答案】C

【解析】根据函数的图像判断

例题 3 若直线 $x + ay - 4 = 0$ 的倾斜角是 30°

则 $a =$ 【2018 年真题】

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

$$x + ay - 4 = 0$$

$$ay = -x + 4$$

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{4}{a}$$

$$-\frac{1}{a} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = -\sqrt{3}$$

例题 4 函数 $y = \sqrt{x(x-1)}$ 的定义域 【2017 年真题】

【答案】 $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0\}$

【解析】

$$x(x-1) \geq 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0$$

例题5 下图是 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图像, 则

A $a < 0$ B $b > 0$ C $c > 0$ D $b < 0, c < 0$

【2017年真题】

【答案】C

【解析】根据二次函数的性质

例题6 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是 【2017年真题】

A 奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

B 偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

C 奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减

D 偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

【答案】C

【解析】根据奇偶函数和单调性的定义判断
或根据图像判断

例题7 设 $f(x+1) = x(x+1)$, 则 $f(2) =$ 【2017年真题】

A 1

B 3

C 2

D 6

【答案】C

【解析】设 $t = x+1$ 可得 $x = t-1$

代入已知可得; $f(t) = t(t-1)$

所以 $f(2) = 2$

例题8 若函数 $y = \frac{ax+1}{2x-3}$ 的图像与其反函数的图像一样则
a = 【2016年真题】

A -3 B 1 C 2 D 3

【答案】D

【解析】

$$y = \frac{ax+1}{2x-3} \Rightarrow y(2x-3) = ax+1$$

$$2yx - 3y = ax + 1$$

$$2yx - ax = 3y + 1$$

$$(2y - a)x = 3y + 1$$

$$x = \frac{3y+1}{2y-a} \Rightarrow a = 3$$

例题 9 若二次函数 $y = ax^2 + 2x$ 的最小值是 $-1/3$

则 $a =$ 【2016 年真题】

【答案】 3

【解析】

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2x \\ &= a\left(x^2 + \frac{2}{a}x\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

例题 10 函数 $y = \sqrt{x^2 + 9}$ 的值域是 【2015 年真题】

【答案】 $[3, +\infty)$

【解析】 根据函数的图像和性质可得

例题 11 设函数 $y = k/x$ 的图像经过点 $(2, -2)$ 则 $k =$

【2015 年真题】

【答案】 -4

【解析】 $-2 = k/2$ 所以 $k = -4$

例题 12 设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像过点 $(-1, 2)$ 和 $(3, 2)$, 则其对称轴的方程式

【2015 年真题】

【答案】 $x = 1$

【解析】 -1 和 3 的对称点是 $x = 1$

例题 13 设 $f(x)$ 是偶函数, 若 $f(-2) = 3$, 则 $f(2) =$

【2015 年真题】

【答案】 $f(2) = 3$

【解析】 因为偶函数 $f(-x) = f(x)$

例题 14 设二次函数 $y = x^2 + ax + b$ 在 $x=1$ 处取得极值-1 求 (1) a, b (2) $f(x)$ 的单调区间和单

调性

【2015 年真题】

【解析】

(1)

$$y = x^2 + ax + b$$

$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \\ -\frac{a^2}{4} + b = -1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

(2) $(-\infty, 1)$ 单调递减

$(1, +\infty)$ 单调递增

例题 15 函数 $y = 1/x - 5$ 的定义域是 【2014 年真题】

A $(-\infty, 5)$ B $(-\infty, +\infty)$

C $(5, +\infty)$ D $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

【答案】D

【解析】 $x \neq 5$

例题 16 函数 $y = 2x + 1$ 的反函数是 【2014 年真题】

A $y = (x+1)/2$ B $y = (x-1)/2$

C $y = 2x - 1$ D $y = 1 - 2x$

【答案】B

【解析】 $y = 2x + 1$

$$2x = y - 1$$

$$x = (y - 1)/2$$

$$y = (x - 1)/2$$

例题 17 二次函数 $y = x^2 + x - 2$ 的图像与 x 轴的交点坐标是

【2014 年真题】

【答案】 $(1, 0)$; $(-2, 0)$

【解析】

$$y = x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = 1$$

例题 18 设函数 $f(x+1) = x/(x+1)$, 则 $f(3) =$

【2014年真题】

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】把 $x=2$ 代入便可