

一、单选题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \quad (\quad)$$

- A. $e^{\frac{3}{2}}$
 B. $e^{\frac{2}{3}}$
 C. $e^{\frac{1}{3}}$
 D. e^6

答案: B

【解析】本题考查了函数极限的知识点

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{3}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

2.

设函数 $y = x + 2 \sin x$ 则 $dy = (\quad)$

- A. $(1 - 2 \cos x)dx$
 B. $(1 + 2 \cos x)dx$
 C. $(1 - \cos x)dx$
 D. $(1 + \cos x)dx$

答案: B

【解析】本题考查了函数微分的知识点

$$y' = (x + 2 \sin x)' = 1 + 2 \cos x, \text{ 故 } dy = y' dx = (1 + 2 \cos x)dx$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = \quad (\quad)$$

- A. $\frac{3}{2}$
 B. 1
 C. 2
 D. $\frac{1}{2}$

答案: A

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1^2 - 1 + 2} = \frac{3}{2}$$

【解析】本题考查了函数微分的知识点

4.

设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) =$ ()

A. x^4

B. $1 + x^4$

C. $\frac{1}{5}x^4$

D. $5x^4$

答案: D

【解析】 本题考查了一阶导数的知识点. $f'(x) = (3 + x^5)' = 5x^4$

5.

设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f'(x) =$ ()

A. $\frac{2}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

C. $\frac{1}{x^2}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

答案: B

【解析】 本题考查了二阶导函数的知识点.

$$f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}, f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$$

6. $\int_{-2}^2 (1+x)dx =$ ()

A. 4

B. 0

C. 2

D. -4

答案: A

【解析】 本题考查了牛顿—莱布尼茨公式的知识点.

$$\int_{-2}^2 (1+x)dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^2 = 4$$

7. $\int \frac{3}{x^5} dx =$ ()

A. $\frac{3}{4x^4} + C$

B. $\frac{3}{5x^4} + C$

C. $-\frac{3}{4x^4} + C$

D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

答案: C

【解析】本题考查了不定积分的知识点.

$$\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C$$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排, 则 2 本英语书恰好相邻的概率为 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

答案: A

【解析】本题考查了随机事件的概率的知识点. 2 本英语书恰好相邻的概率为

$$\frac{A_4^4 \cdot A_2^2}{A_6^6} = \frac{2}{5}$$

9.

设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz =$ ()

A. $x dx - 4y dy$

B. $x dx - y dy$

C. $2x dx - 4y dy$

D. $2x dx - 8y dy$

答案: D

【解析】本题考查了全微分的知识点.

$$\text{易知 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -8y, \text{ 故 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy.$$

10.

设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 。

A. $3x^2 + 2xy$ 。

B. $3x^2 + y^2$ 。

C. $2xy$ 。

D. $2y$ 。

答案：C

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy。$$

【解析】本题考查了函数的偏导数的知识点。

二、简答题

计算 $\int x \sin x dx$ 。

1.

答案：

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -\int x d(\cos x) \\ &= -(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

【解析】

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$ 。

2.

答案：

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

【解析】

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.

答案:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\
&= e^x \cos x - e^x \sin x \\
&= e^x (\cos x - \sin x), \\
f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\
&= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\
&= -2e^x \sin x, \\
\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

【解析】

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.

4.

答案:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) \\
 &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{3}{4} \left(2^{\frac{4}{3}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

【解析】

5.

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域. 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

答案:

【解析】

$$\begin{aligned}
 \text{区域 } D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4, \text{ 故所求旋转体的体积} &= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy \\
 &= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy \\
 &= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{128}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

6. 求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

答案:

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

得驻点为(1,0)(-1,1)(-1,-1)

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在(1,0)点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在(1,0)点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$;

$$\text{在(-1,1)点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点(-1,1)不是极值点;

$$\text{在(-1,-1)点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点(-1,-1)不是极值点

因此函数在(1,0)点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$.

7. 求曲线 $y = x^3 - 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

答案:

$$y' = 3x^2 - 2, y'' = 6x - 2,$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间,

函数的拐点为(1,1)

【解析】

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

8. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

求 a, b ;

答案:

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$

【解析】

三、填空题

1. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$

答案:

$$2e^{2x} dx$$

【解析】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y' dx = 2e^{2x} dx$.

2. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为

答案:

【解析】

$$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$, 令 $f'(x) < 0$, 则有 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$

答案:

【解析】

$$-2$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 而

$$f(0) = -2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a, \text{ 因此 } a = -2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$$

答案:

$$x \rightarrow 0 \text{ 时, } x^2 \rightarrow 0, \text{ 故有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

【解析】

5. $\int (3x + 2 \sin x) dx =$

答案:

$$\frac{3}{2}x^2 - 2 \cos x + C$$

【解析】 $\int (3x + 2 \sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2 \cos x + C$

6. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的斜率为

答案:

【解析】

$$\frac{3}{2}$$

由题意可知 $y' = [\arctan(3x + 1)]' = \frac{3}{1 + (3x + 1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为

$$y'|_{x=0} = \frac{3}{1 + (3x + 1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}$$

7. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' =$

答案:

$$2 \sin(4x^2)$$

$$\left(\int_0^{2x} \sin t^2 dt \right)' = \sin(2x)^2 \cdot (2x)' = 2 \sin(4x^2)$$

【解析】

8. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$

答案:

$$e$$

【解析】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$

9. 区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为

答案:

$$\frac{4}{3}.$$

$$\text{区域 D 的面积为 } \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

【解析】

方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 (x, y) 的某领域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$

10.

答案:

【解析】

$$\frac{1}{2}.$$

方程两边同时对 x 求导, 得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3 + 1}$, 所以故有

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^3 + 1} \Big|_{x=1} = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}.$$