

一、单选题

1. 设函数 $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$, 则 $f(g(x))$ ()

- A. 是奇函数但不是周期函数
- B. 是偶函数但不是周期函数
- C. 既是奇函数又是周期函数
- D. 既是偶函数又是周期函数

答案: B

【解析】本题考查了复合函数的性质的知识点. ① $f(g(x))=f(x^2)=\sin x^2$ ② $\sin(-x)^2=\sin x^2$ ③ $f(x)=f(-x)$ 函数为偶函数; 无法求证周期性。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^2 - 1}{x} = 2, \text{ 则 } a = ()$$

2.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

答案: A

【解析】本题考查了洛必达法则的知识点.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2a(1+ax) = 2 \Rightarrow a = 1$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 则在 $x=0$ 处

- A. $f(x)g(x)$ 连续
- B. $f(x)g(x)$ 不连续
- C. $f(x)+g(x)$ 连续
- D. $f(x)+g(x)$ 不连续

答案: D

【解析】本题考查了函数的连续性的知识点. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 故 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 否则若 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)+g(x)-f(x)=g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 与题意矛盾, 故选 D 选项.

4. 设 $y=\arccos x$, 则 $y'=()$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

B.

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

C.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

D.

$$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

答案: B

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

【解析】本题考查了函数导数的知识点.

5. 设 $y = \ln(x + e^{-x})$, 则 $y' = ()$

A.

$$\frac{1+e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

B.

$$\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

C.

$$\frac{1}{1-e^{-x}}$$

D.

$$\frac{1}{x+e^{-x}}$$

答案: B

$$y' = [\ln(x + e^{-x})]' = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

【解析】本题考查了复合函数的导数的知识点.

6. 设 $y^{(-2)} = x^2 + \sin x$, 则 $y^{(2)} = ()$

A. $2 - \sin x$

B. $2 - \cos x$

C. $2 + \sin x$

D. $2 + \cos x$

答案: A

【解析】本题考查了高阶导数的知识点.

$$f(x) = y^{(n-2)} = x^2 + \sin x, \quad f''(x) = y^{(n)} = 2 - \sin x$$

7. 若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = -x + 1$, 则 $()$

A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增

C. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增

D. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

答案: C

【解析】本题考查了函数的单调性的知识点. 当 $x < 1$ 时, $f'(x) = -x + 1 > 0$, 故函数的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) = -x + 1 < 0$, 故函数的单调递减区间为 $(1, +\infty)$. 因此选 C 选项.

曲线 $y = \frac{2x}{x-1}$ 的水平渐近线方程为 $()$

8.

A. $y=0$

B. $y=1$

C. $y=2$

D. $y=3$

答案: C

【解析】本题考查了函数的水平渐近线的知识点.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = 2$, 故函数的水平渐近线为 $y=2$

9. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 则 $\int f'(x) dx =$ ()

A.

$$\arctan x + C$$

B.

$$-\arctan x + C$$

C.

$$\frac{1}{1+x^2} + C$$

D.

$$-\frac{1}{1+x^2} + C$$

答案: A

【解析】本题考查了不定积分的性质的知识点.

$$\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C$$

10. 设 $z = e^{x+y}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ ()

A.

$$dx + dy$$

B.

$$dx + e dy$$

C.

$$e dx + dy$$

D.

$$e^2 dx + e^2 dy$$

答案: D

【解析】本题考查了二阶函数的全微分的知识点.

由题可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = e^{x+y} dx + e^{x+y} dy$,

因此 $dz|_{(1,1)} = e^2 dx + e^2 dy$

二、简答题

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

1.

答案:

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$, 所以 $a=2$

【解析】

设 $y = \frac{x}{1-x}$, 求 y'

2.

答案:

$$y' = \frac{1-x-x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

【解析】本题考查的是求导公式的知识点

求 $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

3.

答案:

【解析】本题考查的是不定积分的知识点

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \ln(x+2) + C \\ &= \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

4. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$

答案:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-4} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-x^{-3}}{3} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3b^3} \right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

【解析】本题考查的是定积分计算的知识点

5. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

- (1) 求 X 的分布函数 $F(x)$;
(2) 求 $E(X)$.

答案:

【解析】本题考查的是离散型随机变量分布的知识点

$$(1) F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(2) E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$$

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2y^2 + 2xz + z^2 = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

6. 答案:

【解析】本题考查的是隐函数求偏导的知识点

方程两边分别对 x , y 求偏导得

$$2z + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$4y + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{联立两式, 解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x+z}$$

7. 设 D 为由曲线 $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ 所围成的图形. (1) 求 D 的面积; (2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

答案:

$$(1) S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$(2) V = \int_0^2 \pi x^4 dx = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

【解析】本题考查的是定积分应用的知识点

8. 证明: 当 $x>1$ 时, $\ln x < x-1$.

答案:

【解析】设 $f(x)=x-1-\ln x$, 则 $f'(x)=1-1/x$ 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. 又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $f(1)=0$, 所以当 $x>1$ 时, $f(x)>0$. 因此当 $x>1$ 时, $x-1-\ln x>0$, 即 $\ln x < x-1$.

三、填空题

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{2e^x - x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.

答案:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{2e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x - 1} = -1$$

【解析】本题考查了洛必达法则的知识点.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2.

答案:

【解析】本题考查了高阶无穷小量的知识点.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

3. $y = 3x^2 + \ln 3$, 则 $y' =$

答案:

【解析】本题考查了导数的性质的知识点: $y' = (3x^2 + \ln 3)' = (3x^2)' + (\ln 3)' = 6x + 0 = 6x$.

曲线 $y = x + \sqrt{x}$ 在点 $(1, 2)$ 处的法线方程为_____.

4.

答案:

【解析】本题考查了导数的几何意义的知识点.

由题意得, $y' = (x + \sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 $y'|_{x=1} = \frac{3}{2}$, 因此曲线在点 $(1, 2)$ 处法线的斜率

是 $-\frac{2}{3}$, 故所求法线的方程为 $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$, 即 $2x + 3y - 8 = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5.

答案:

【解析】本题考查了对称区间上奇偶函数的定积分的性质的知识点.

$$\text{令 } f(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}, \quad f(-x) = \frac{-x \cos x}{1+x^2} = -f(x)$$

因此 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx = 0$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = (\quad)$$

6.

答案:

【解析】本题考查了定积分计算的知识点

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

设函数 $f(x) = \int_0^x u \tan u du$, 则 $f'(\frac{\pi}{4}) =$ _____.

7.

答案:

【解析】本题考查了变上限定积分的知识点.

由题意可得, $f'(x) = (\int_0^x u \tan u du)' = x \tan x$, 因此 $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

设 $z = x^3y + xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8.

答案:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

【解析】本题考查了二阶偏导数的知识点.

设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, $u = x + y$, $v = xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9.

答案:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$$

【解析】本题考查了偏导数的知识点

10. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A)=0.5$, $P(AB)=0.4$, 则 $P(B|A)=$

答案:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

【解析】本题考查了条件概率的知识点.