

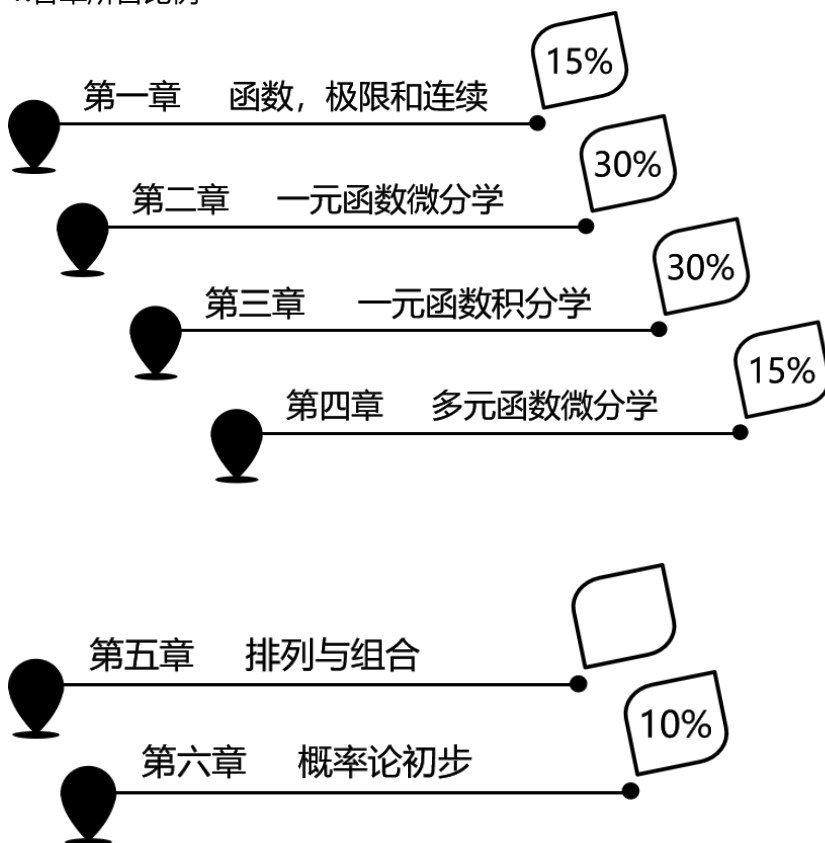
前言

目录

- 一、考试分析
- 二、每章出题点
- 三、考试题型及数量

一、考试分析

1. 各章所占比例



二、每章出题点

第一章 函数, 极限和连续

- 1、求极限 (重点)
- 2、无穷小量的比较 (难点)
- 3、根据连续的定义求值 (重点)
- 4、求间断点
- 5、求渐近线 (难点)

第二章 一元函数微分学

- 1、根据导数的定义求某些量（难点）
- 2、求导数
- 3、利用导数的几何意义求切线和法线
- 4、利用洛必达法则求极限（重点）
- 5、求微分
- 6、判断函数的单调性并求极值点和极值
判断函数的凹凸性并求拐点（重点）
- 7、求最值

第三章 一元函数积分学

- 1、求原函数
- 2、求不定积分（重点、难点）
- 3、利用变上限定积分求极限
- 4、求定积分（重点、难点）
- 5、定积分的应用（重点、难点）
- 5、广义积分（难点）

第四章 多元函数微分学

- 1、求偏导（包括二阶）
- 2、求全微分
- 3、求二元函数的极值

第五章 排列与组合

不会单独出题，但某些知识点会在下一章
《概率论初步》中出现，如

- 1 排列的计算
- 2 组合的计算
- 3 加法原理
- 4 乘法原理

第六章 概率论初步

- 1 事件的运算
- 2 概率的性质
- 3 古典概型
- 4 离散型随机变量的分布列和分布函数(重点)
- 5 离散型随机变量的 $E(X)$ 和 $D(X)$ （重点）

三、考试题型及数量

01	选择题 (10) 40分	<
02	填空题 (10) 40分	<
03	计算题 (8) 70分	<

计算题

- (1) 求极限（通常是用罗比达法则）
- (2) 求定积分
- (3) 求偏导数

- (4) 导数的应用 (求最值)
- (5) 定积分的应用
- (6) 求导数或微分
- (7) 求离散型随机变量的分布列和 $E(X)$ 和 $D(X)$
- (8) 求二元函数的极值

第一章 函数, 极限和连续

第一节 函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

【例1】求函数 的定义域

名师答案: $-1 < x < 1$

名师解析:

$$\begin{aligned} 1-x^2 > 0 &\Rightarrow x^2 < 1 \\ &\Rightarrow -1 < x < 1 \end{aligned}$$

第二节 极限

【例2】当 $x \rightarrow 0$, 下列是无穷小量的是

A, e^x B, $\sin x$ C, $\frac{\sin x}{x}$ D, $\sin \frac{1}{x}$

名师答案: B

名师解析: $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在}$$

【例3】当 $x \rightarrow 0$, 下列变量与 x 是无穷小量的是

A, $\sin 2x$; B, $1 - \cos x$; C, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; D, $x \sin x$

名师答案: C

名师解析:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1 \end{aligned}$$

【例4】下列极限中正确的是

$$A, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1; B, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = 1; C, \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1; D, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

名师答案: C

名师解析:

$$A, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 0; B, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

$$C, \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1; D, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

【例 5】求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{x+1}$$

名师解析:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{3x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^1 \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{\frac{-3x}{2}} \right]^{\frac{-2}{3}} = e^{\frac{-2}{3}} \end{aligned}$$

【例 6】求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

【例 7】求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x}$$

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x \cdot 2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) \sin x}{2x^3 + x}$$

【例 8】求极限

名师解析:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1)\sin x}{2x^3+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1)x}{2x^3+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+1)}{2x^2+1} = 1\end{aligned}$$

【例9】当 $x \rightarrow 0$, $\sin bx$ 是 x^2

- A 高阶无穷小量 B 等价无穷小量
C 同阶但不等价无穷小量 D 低阶无穷小量

名师答案: D

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x} = \infty$$

【例10】如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 处

- A 一定有定义 B 一定无定义
C 可以有定义, 也可无定义 D 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

名师答案: C

名师解析: $\lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}; & x > 0 \\ 1; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

【例11】设 $f(x) = e^{-x^2} - 1, g(x) = x^2$, 当 $x \rightarrow 0$

- A $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量
B $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小量
C $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶但不等价无穷小量
D $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小量

名师答案: C

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

【例 12】下列命题正确的是

- A 无穷小量是绝对值很小很小的数
- B 无穷大量是绝对值很大很大的数
- C 无穷小量的倒数是无穷大量
- D 无穷大量的倒数是无穷小量

名师答案：D

名师解析：无穷小量与无穷大量的概念

【例 13】极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} =$$

A, 0 B, $\frac{1}{4}$ C, $\frac{1}{2}$ D, 1

名师答案：B

名师解析：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【例 14】下列各式正确的是

A, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$ B, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

C, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = e$ D, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

名师答案：D

名师解析：第二类重要极限的使用条件

【例 15】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^2$$

则 k =

A, 2 B, -2 C, $\frac{1}{2}$ D, $-\frac{1}{2}$

名师答案：B

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{-2}{x}\right)^x = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= e^2$$

第三节 函数的连续性

【例 16】

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & -1 < x < 1 \\ a, & x = 1 \\ 3x^2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

设函数

在 $x=1$ 处连续, 则 $a=$

名师解析:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$$

$$\Rightarrow a = 3$$

【例 17】

设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$

【12 年真题】

名师解析:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x) = a \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

【例 18】

设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ a - x, & x < 1 \end{cases}$

在 $x=1$ 处连续, 则 $a=$ 【13 年真题】

名师解析:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (a - x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

【例 19】

的间断点是

名师解析:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{不存在}$$

所以间断点是 $x=0$

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分

【例1】已知 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{2}$; 求 $f'(1)$

A, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{4}$ C, $-\frac{1}{4}$ D, $-\frac{1}{2}$

名师答案: B

名师解析: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{1}{2}$
 $2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = \frac{1}{4}$
 $= f'(1)$

【例2】已知 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$; 求 $f'(x_0)$

A, -4 B, -2 C, 2 D, 4

名师答案: B

名师解析: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$
 $-\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = -\frac{1}{2}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{-2h} = -2$

【例3】 已知 $f'(0) = 1$ 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h}$

A, 2 B, 1 C, $\frac{1}{2}$ D, 0

名师答案: A

名师解析: $2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+2h) - f(0)}{2h} = 2f'(0) = 2$

【例4】 函数 $y = |x| + 1$ 在 $x=0$ 处

A 无定义 B 不连续
C 可导 D 连续但不可导

名师答案: D

名师解析: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| + 1 - 1}{\Delta x} \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x| + 1 - 1}{\Delta x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x| + 1 - 1}{\Delta x} = -1 \end{cases}$$

【例5】 下列函数 在 $x=0$ 处可导

A, $y = |x|$; B, $y = x^{\frac{3}{2}}$; C, $y = 2\sqrt{x}$; D, $y = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

名师答案: B

名师解析: $\begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0 \end{cases}$

【例6】 曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 (1,2) 处切线的斜率 $k =$

A 1 B 2
C 3 D 4

名师答案: C

名师解析:

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y' \Big|_{x=1} = 3 = k$$

【例7】直线L与x轴平行，且与曲线 $y=2x-e^{2x}$ 相切
则切点坐标是

- A (1,1) B (-1,1)
C (0, -1) D (0,1)

名师答案: C

名师解析: $y' = 2 - 2e^{2x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$

【例8】过曲线 $y=x^2+x-2$ 上的一点M作切线，如果切线与直线 $y=4x-1$ 平行，则切点坐标是

名师答案: $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$

名师解析:

$$y' = 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

【例9】已知 $y = \sin x^2$ 求 y'

名师解析:

$$y = \sin x^2 = \begin{cases} y = \sin u \\ u = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = (\sin u)' (x^2)'$$

$$= 2x \cos x^2$$

【例10】已知 $y = \frac{x^3}{\cos x}$ 求 y' 【10年真题】

名师解析:

$$y' = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$$

【例11】已知 $y = \cos(x^2 + 1)$ 求 y' 【15年真题】

名师解析:

$$\begin{cases} y = \cos u \\ u = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow y' = -2x \sin(x^2 + 1)$$

【例 12】已知 $y = e^{\sin x}$ 求 dy 【09 年真题】

名师解析：

$$\begin{cases} y = e^u \\ u = \sin x \end{cases} \Rightarrow y' = e^{\sin x} \cos x$$

$$\Rightarrow dy = e^{\sin x} \cos x dx$$

【例 13】已知 $y = \sin x^2 + 2x$ 求 dy 【13 年真题】

名师解析：

$$y' = 2 + (\sin x^2)' = 2 + 2x \cos x^2$$

$$\Rightarrow dy = (2 + 2x \cos x^2) dx$$

【例 14】函数 $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$ 求 $f'(0)$

名师解析：

$$f'(x) = 2x \arctan x + 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1$$

【例 15】已知 $y = e^{-5x}$ 求 dy

A, $-5e^{-5x} dx$ B, $-e^{-5x} dx$
 C, $e^{-5x} dx$ D, $5e^{-5x} dx$

名师答案：A

名师解析： $y' = e^{-5x} (-5x)' = -5e^{-5x}$

第二节 洛必达法则

【例 16】求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{3}{2}$$

【例 17】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}$

名师解析:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

【例 18】求

名师解析:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(x+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-1}$$

【例 19】求

【09 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{2x}-2e^x}{x^2}$$

【例 20】求

【14 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{2x} - 2e^x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 2e^x}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

第三节 导数的应用

【例 21】已知 $f'(x_0) = 0$ 则 $x = x_0$

- A 是驻点 B 不是驻点
C 是极大值点 D 是极小值点

名师答案: A

名师解析: 根据驻点的定义

【例 22】函数 $f(x) = \ln(1 + x^2)$ 单调增加区间

- A $(-5, 5)$ B $(-\infty, 0)$
C $(0, +\infty)$ D $(-\infty, +\infty)$

名师答案: C

名师解析: $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0$
 $\Rightarrow (0, +\infty)$

【例 23】函数 $f(x) = e^{-x}$ 在定义域内单调

- A 增加且是凹的 B 增加且是凸的
C 递减且是凹的 D 递减且是凸的

名师答案: C

名师解析:

$$f'(x) = -e^{-x} < 0$$

$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

【例 24】直线 L 与 x 轴平行, 与 $y = x - e^x$ 相切, 则切点的坐标是

- A $(1, 1)$ B $(-1, 1)$
C $(0, -1)$ D $(0, 1)$

名师答案: D

名师解析:

$$y' = 1 - e^x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

【例25】函数 $y = 6x - 24x^2 + x^4$ 的凸区间

A $(-2, 2)$

B $(-\infty, 0)$

C $(0, +\infty)$

D $(-\infty, +\infty)$

名师答案: A

名师解析:

$$y' = 6 - 48x + 4x^3$$

$$y'' = 12x^2 - 48 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$(-\infty, -2), (-2, 2), (2, +\infty)$$

【例26】函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1} + 3$ 的水平渐近线

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + 3 \right) = 3$$

$$\Rightarrow y = 3$$

【例27】求函数 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的单调区间和极值

和凹凸区间及拐点

$$\text{名师解析: } y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 2), (2, +\infty)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
	+		-		-		+
	-	-	-		+	+	+
y	递增凸	极大值-1	递减凸	拐点	递减凹	极小值-5	递增凹

【例28】求函数 $y = x^2 - \frac{2}{x}$ 的单调区间和极值和凹凸区间及拐点

【06年真题】

名师解析：

$$y' = 2x + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y'' = 2 - \frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2}$$

$$x \neq 0$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$			
	-		+	+		+
	+	+	+	-		+
y	递减凹	极小值 3	递增凹	递增凸	拐点	递增凹

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

【例 1】设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx =$

A, $F(e^{-x}) + C$ B, $-F(e^{-x}) + C$

C, $F(e^x) + C$ D, $F(e^x) + C$

名师答案：B

名师解析：

$$\begin{aligned} \int e^{-x} f(e^{-x}) dx &= - \int f(e^{-x}) d(e^{-x}) \\ &= -F(e^{-x}) + C \end{aligned}$$

【例 2】 $\int \cos(x+2) dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned} &\int \cos(x+2) dx \\ &= \int \cos(x+2) d(x+2) \\ &= \sin(x+2) + C \end{aligned}$$

【例 2】 $\int \frac{1+x e^{5x}}{x} dx =$ 【13 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x e^{5x}}{x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int e^{5x} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{5} e^{5x} + c\end{aligned}$$

【例3】 $\int \frac{x}{1+x} dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1-1}{1+x} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{1+x} d(x+1) \\ &= x - \ln|x+1| + c\end{aligned}$$

【例3】 若 $\int f(x) e^{x^2} dx = e^{x^2} + c$ 则 $f(x) =$

【09年真题】

名师解析：

$$(e^{x^2} + c)' = 2xe^{x^2} \Rightarrow f(x) = 2x$$

【例3】 $\int \frac{1}{x^4} dx$ 【10年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4} dx &= \int x^{-4} dx = \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + c \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + c\end{aligned}$$

$$\text{【例4】} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx =$$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} d(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2} \int d(x^2+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

$$\text{【例5】} \int x \sin(x^2+1) dx =$$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2+1) dx &= \frac{1}{2} \int \sin(x^2+1) d(x^2+1) \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2+1) + c \end{aligned}$$

$$\text{【例6】} \int x^2 \ln x dx =$$

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} \int \ln x dx^3 \\
 &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln x - \int x^3 d \ln x \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln x - \int x^3 \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(x^3 \ln x - \frac{1}{3} x^3 \right) + c
 \end{aligned}$$

第二节 定积分

【例7】 $\int_0^1 2e^x dx =$

名师解析：

$$\int_0^1 2e^x dx = 2e^x \Big|_0^1 = 2(e-1)$$

【例8】 $\frac{d}{dx} \int_a^b \arctan x dx =$

- A, $\arctan x$ B, $\frac{1}{1+x^2}$
 C, 0 D, $\arctan a - \arctan b$

名师答案：C

名师解析：常数的导数为0

【例9】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{\int_0^x t dt}$

- A, -1 B, 0
 C, 1 D, 2

名师答案：C

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{\int_0^x t dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x \sin t dt)'}{(\int_0^x t dt)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

【例 10】下列反常积分收敛的是

$$A, \int_1^{+\infty} x dx$$

$$B, \int_1^{+\infty} x^2 dx$$

$$C, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$D, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

名师答案：D

名师解析：

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} \\ &= -(0-1) = 1 \end{aligned}$$

【例 11】若 $y = \int_0^{x^2} t \sqrt[3]{1+t^2} dt$, 则 y'

名师解析：

$$\begin{aligned} y' &= x^2 \sqrt[3]{1+x^4} \cdot 2x \\ &= 2x^3 \sqrt[3]{1+x^4} \end{aligned}$$

$$\text{【例 12】} \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

名师解析：0

被积函数是奇函数，积分区间是对称区间

$$\text{【例 13】} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx =$$

$$\begin{aligned} \text{名师解析：} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int \sin^2 x d \sin x \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx &= \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} (1-0) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

【例14】 $\int_{-1}^1 |x^2 - 3x| dx =$

名师解析:
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x^2 - 3x| dx &= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

第三节 定积分的应用

【例15】求由抛物线 $y = 1 - x^2$ 及其在点 $(1, 0)$

的切线和y轴所围成的面积

名师解析:
$$\begin{aligned} y' = -2x &\Rightarrow k = -2 \\ y &= -2x + 2 \\ s &= \int_0^1 (-2x + 2 - 1 + x^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

【例16】求由 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x$ 所围成的平面图形

绕x轴旋转一周所得体积

名师解析:
$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} &\Rightarrow (0, 0), (2, 2) \\ v &= \int_0^2 \pi \left(x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) dx = \frac{16}{15} \pi \end{aligned}$$

第四章 多元函数微分学

$z = x^2 \sin y + ye^x$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【例1】设函数

名师解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + ye^x$$

$z = x^2 y + xy^3$ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

【例2】设函数

名师解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 3y^2$$

$$z = \frac{y}{x} \text{ 求 } dz \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}}$$

【例3】设函数

名师解析：

$$z = \frac{y}{x} \text{ 求 } dz \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$dz = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy$$

$$dz \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -\frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} dy$$

【例4】设函数

求极大值点

$$\text{名师解析: } \frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 = A; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = B; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 = C;$$

$$B^2 - AC < 0; A < 0 \Rightarrow (2, -2) \text{ 是极大值点}$$

【例5】 设函数 $z = x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2$

求极值 【09年真题】

名师解析: $z = x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$B^2 - AC = < 0, A > 0 \quad \text{极小值} -10$$

【例6】 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - e^z = 0$

所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 【08年真题】

名师解析: $F = x^2 + y^2 - e^z$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \frac{\partial F}{\partial z} = -e^z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2x}{e^z}$$

【例7】 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$

所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 【14年真题】

名师解析: $F = e^y + xy - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y; \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-y}{e^y + x}$$

第五章 排列与组合

【例1】从6人中选出4人分别到巴黎, 伦敦, 悉尼, 莫斯科4个城市旅游, 要求每个城市有一人游览每人只游览一个城市, 且甲, 乙不能去巴黎游览则有多少种不同的选择方案

名师解析:

$$C_4^1 C_5^1 C_4^1 C_3^1 = 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 240$$

【例2】从装有2个白球，3个黑球的袋子中任取3个球问有多少种不同的取法？

名师解析：3个黑球； $C_3^3 = 1$

2个黑球，1个白球； $C_3^2 C_2^1 = 6$

1个黑球，2个白球； $C_3^1 C_2^2 = 3$

第六章 概率论初步

【例1】甲乙两人独立地向同一目标射击，击中目标的概率分别为0.8和0.5，两人各射击一次，求至少有一人击中目标的概率【06年真题】

名师解析：

设A=甲击中目标， $P(A)=0.8$

B=乙击中目标， $P(B)=0.5$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=0.8+0.5-0.8*0.5=0.9$

【例2】一枚均匀的硬币连续抛3次，求3次都是正面向上的概率

【08年真题】

名师解析：

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

【例3】设A,B是两个随机事件， $P(A)=0.8$ ， $P(AB)=0.3$ ，则 $P(A-B)$

【11年真题】

名师解析： $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5$

【例4】有10件产品，8件正品，2件次品甲乙两人先后各取1件产品，求甲先取到正品的条件下，乙取到正品的概率【10年真题】

名师解析：

设A=甲取到正品， $P(A)=0.8$

B=乙取到正品， $P(B)=0.8$ $P(B/A)=\frac{7}{9}$

【例5】袋中有8个乒乓球，5个白的，3个黄的从中一次任取2个，则取出的都是白色的概率

【10年真题】

名师解析：

$$\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

【例6】有50件产品，45件正品，5件次品，从中任取3件，求至少有1件是次品的概率

【14年真题】

名师解析：

$$1 - \frac{C_{45}^3}{C_{50}^3} \approx 0.28$$

【例 7】 设随机变量的分布列是

【16 年真题】

X	0	10	20	30
P	0.2	a	0.2	0.3

(1)求 a

(2)求 E(X)

(3)求 D(X)

(1)a=1-0.2-0.2-0.3=0.3

(2)E(X)=10*0.3+20*0.2+30*0.3=16

(3)

X²	0	100	400	900
P	0.2	0.3	0.2	0.3

D(X)= 100*0.3+400*0.2+900*0.3-16*16=124