

前言

前言

目录

一、微积分简介

二、考试分析

三、每章重点、难点及学习方法

四、考试题型

五、考情分析

一、微积分简介

1.微积分发展的背景

大约从 15 世纪初开始的文艺复兴时期起,工业,农业,航海,贸易等大规模发展,刺激自然科学蓬勃发展,到了 17 世纪开始进入综合突破阶段,所有问题汇总成四个核心问题:

(1) 求非匀速运动物体的瞬间速度

(2) 求过曲线上一点的切线

(3) 求函数的极值和最值

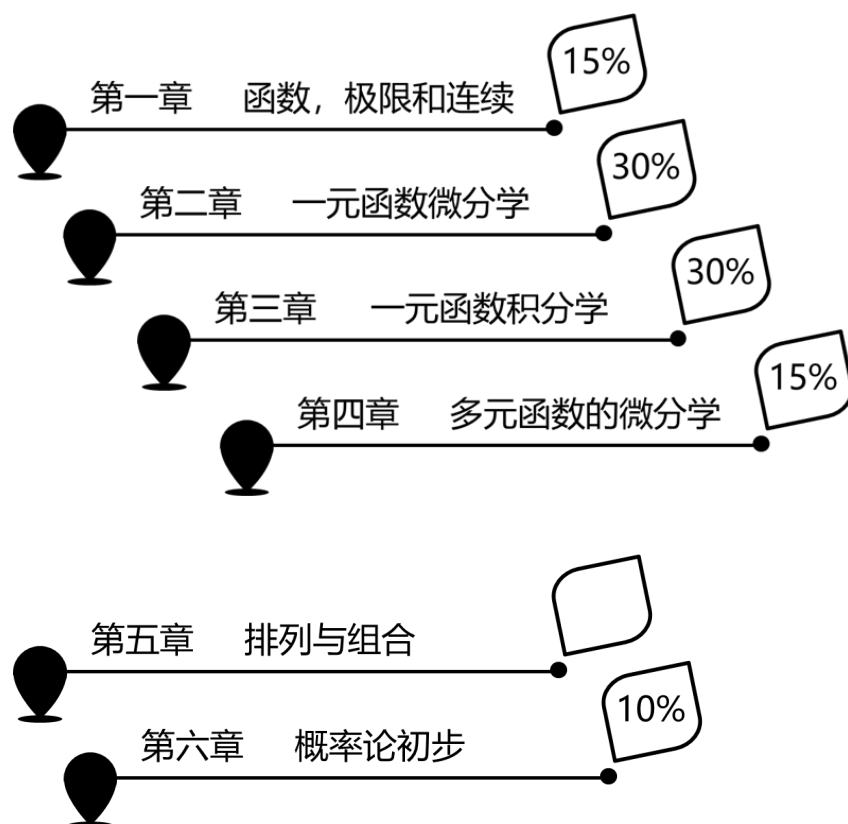
(4) 计算长度,面积,体积等。

2.谁创立了微积分

由牛顿(英国)和莱布尼茨(德国)最后完成。在这之前有很多科学家做了许多的铺垫工作,如;费马,迪卡尔,巴罗等。

二、考试分析

1、各章所占比例



三、每章重点、难点及学习方法

第一章 函数, 极限和连续

重点：1 求极限

2 连续的定义(三个基本要素)

难点：1 求极限

2 判断函数在一点的连续性

学习方法：本章的题目一般是比较容易，或中等难度的题，是容易拿分的内容，理清思路，注意区别，加强练习（特别是一题多解）

第二章 一元函数微分学（重点）

重点：1 导数的定义

2 求导数的公式

3 求微分

4 复合函数，隐函数的求导

5 高阶导数

6 判断单调、凹凸区间，求极值点和拐点，求极值和最值

难点：1 隐函数的求导

2 导数的定义

学习方法：这一章是比较容易得分的，难度不大，熟记公式，多做题。

第三章 一元函数积分学（重点）

重点：1 原函数的定义

2 积分公式

3 直接积分法，换元积分法，分部积分法

4 定积分的几何意义

5 变上限函数

6 牛顿——莱布尼茨公式

7 定积分的应用

难点：1 求不定积分

2 定积分的应用

学习方法：这一章难度比较大，在熟记公式的基础上，多做题，注意区分微分与积分。

第四章 多元函数微分学

重点：1 求偏导（包括高阶）

2 求全微分

3 求极值

难点：1 求极值

学习方法：理清思路，特别注意和一元微分的紧密联系。

第五章 排列与组合（不重要）

重点：1 排列的计算公式

2 组合的计算公式

3 排列与组合的区别

难点：1 排列与组合的区别。

第六章 概率论初步

重点：1 概率的性质

2 古典概型

3 离散型随机变量的分布列和分布函数

4 离散型随机变量的 $E(X)$ 和 $D(X)$

难点：1 离散型随机变量的分布函数

2 $D(X)$

学习方法：要把随机变量与函数联系起来理解，

注意求分布函数的规律。

四、考试题型

1.选择题 (40)

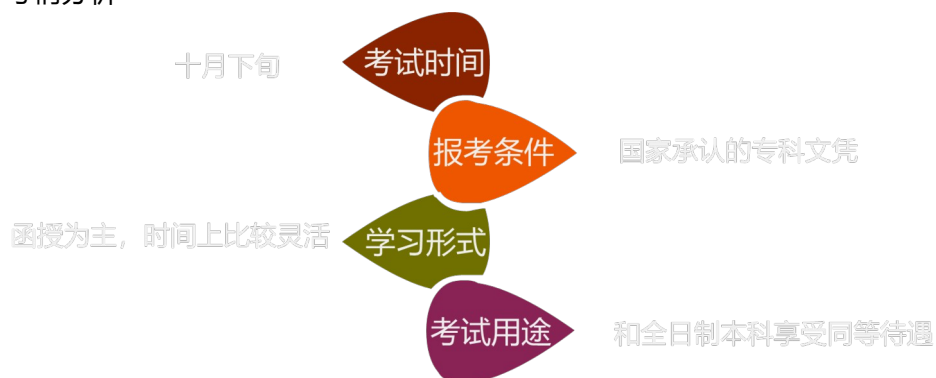
2.填空题 (40)

3.计算题 (70)

计算题

- (1) 求极限
- (2) 求导数，微分，偏导数
- (3) 求不定积分
- (4) 离散型随机变量的分布列和 $E(X)$, $D(X)$
- (5) 定积分的应用
- (6) 求极值 (包括二元函数)

五、考情分析



第一章 函数，极限和连续

第一节 函数

一 函数的概念

1, 函数定义域的求法

- (1) 分式的分母不能为 0
- (2) 偶次方根的底数大于等于 0
- (3) 对数的真数大于 0

2, 函数的表示 (忽略)

3, 显函数，分段函数和隐函数

第一节 函数

$$y = x^2 - x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$xy^2 + \sin xy + 6 = 0$$

二 函数的简单性质

1 单调性

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \uparrow$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \downarrow$$

2 奇偶性

- 奇函数;
- 偶函数;
- 3 周期性 (忽略)
- 4 有界性

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arc} \cot x$$

三 初等函数

1 反函数 (忽略)

2 基本初等函数 (忽略)

3 复合函数

$$y = \sqrt{x^2 - 1} = \begin{cases} y = \sqrt{u} \\ u = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$y = \sin x^2 = \begin{cases} y = \sin u \\ u = x^2 \end{cases}$$

$$y = \sin^2 x = \begin{cases} y = u^2 \\ u = \sin x \end{cases}$$

4 初等函数 (忽略)

第二节 极限

一 数列的极限 (忽略)

二 函数的极限

1 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

定义; 当 $x \rightarrow x_0$ 函数 $f(x)$ 无限逼近某一个常数 A , A 就是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极

限。记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{cases}$$

左极限

左右极限都存在但不相等或左右极限有一个不存在，那么总的极限就不存在。

【例 1】已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 \end{cases}$$

左右极限都存在但不相等所以总的极限不存在。

【例 2】对于下列函数 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在的是

$$A, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}; B, f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$C, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}; D, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

名师答案：C

名师解析：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

2 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

定义;当 $x \rightarrow \infty$ 函数 $f(x)$ 无限逼近某一个常数 A , A 就是函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

两个极限都存在但不相等或两个极限有一个不存在, 那么总的极限就不存在。

【例3】求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

两个极限都存在但不相等所以总的极限不存在。

3 函数极限的性质 (忽略)

4 运算法制

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x)$$

$$(\lim [Af(x)] = A \lim f(x))$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

三 无穷小和无穷大

1 无穷小的定义; 在自变量的某个变化过程中极限为零的函数称为无穷小量, 简称无穷小

2 无穷大的定义; 在自变量的某个变化过程中极限为无穷大的函数称为无穷大量, 简称无穷大

如;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \therefore \frac{1}{x}$$

是无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \therefore \frac{1}{x}$$

是无穷大

3 无穷小量与无穷大量的关系; 无穷小和无穷大互为倒数关系 (了解)

4 无穷小量的性质; 无穷小量与有界量的乘积是无穷小量

【例 4】求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

名师解析：

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$

而当 $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x}$ 是无穷小量,
 $\sin x$ 是有界函数

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

【例 5】下列命题正确的是

- A 无穷小量的倒数是无穷大量
- B 无穷小量是绝对值很小很小的数
- C 无穷小量是 0 为极限的变量
- D 无界变量一定是无穷大量

名师答案：C

名师解析：根据定义判断

5 无穷小量的比较

定义 设 α 和 β 是同一过程下的无穷小量

如果

5 无穷小量的比较

定义 设 α 和 β 是同一过程下的无穷小量

如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ α 是 β 的高阶无穷小

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ α 是 β 的低阶无穷小

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = c (c \neq 1)$ α 和 β 是同阶无穷小

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ α 和 β 互为等价无穷小

性质；两个等价无穷小可以互相替换

$$\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x) \quad \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$$

设在某种条件下

$$\lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$$

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$$

【例6】当 $x \rightarrow 0$ 时下列变量是无穷小量

$$A; \frac{1}{x^2} \quad B; 2^x \quad C; \sin x \quad D; \ln(x+e)$$

名师答案：C

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)}$$

【例7】 【17年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

【例8】 【17年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xx}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \end{aligned}$$

【例9】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

名师解析：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【例10】当 $x \rightarrow 0$ 时下列变量与 x^2 是等价无穷小量
A, $x \sin^2 x$; B, $x \cos^2 x$; C, $x \sin x$; D, $x \cos x$

【17年真题】

名师答案：C

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$$

【例11】当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 与 $\tan 2x$ 比较是

- A 较高阶的无穷小量
- B 较低阶的无穷小量
- C 等价无穷小量
- D 同阶但不等价的无穷小量

名师答案：A

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0$$

名师解析：

四 两个重要极限

第一重要极限

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

注意; 1 三统一原则

2 $u(x)$ 要趋近 0

$$\lim (1 + A)^B = e$$

第二重要极限

特点 1 $1+$

2 $AB=1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)}$$

【例 12】

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = 1$$

【例 13】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$ 【18 年真题】

$A, e; B, 2; C, 1; D, 0$

名师答案: D

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$$

【例 14】

$A; e^{-2}$

$B; e^{-1}$

$C; e$

$D; e^2$

名师答案: D

名师解析:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2$$

$$= e^2$$

【例 15】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$ 【18 年真题】

名师答案: e^{-3}

名师解析: $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{-3x}} \right]^{-3} = e^{-3}$

五 求极限的方法

1 通过因式分解

【例 16】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

名师解析: 原式=

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

2 通过分子或分母有理化

【例 17】 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

名师解析:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = 0
\end{aligned}$$

3 分子, 分母同除以指数最高项

【例 18】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{4x^2 - 1} = \infty$$

特点 (1) $x \rightarrow \infty$

(2) 有理分式

第三节 函数的连续性

一 连续函数的概念

1 函数在一点连续的定义

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2 左连续, 右连续 (忽略)

3 函数中区间上的连续; 初等函数中定义域内都连续。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 1 \\ a, & x > 1 \end{cases}$$

【例 19】设

在 $x=1$ 处连续则 $a=$

名师答案: B

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

名师解析:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin x}{x}; & x < 0 \\ 3x + a; & x \geq 0 \end{cases}$$

【例 20】设 在 $x=0$ 处连续则 $a=$

【18 年真题】

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x + a, & x < 0 \end{cases}$$

【例 21】设 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$

【16 年真题】

A -1

B 0

C 1

D 2

名师答案：C

名师解析：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x}, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

【例 22】设 在 $x=0$ 处连续则 $a=$

名师解析：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan ax}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 1 \\ \frac{2}{x^2} - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad f\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\right) =$$

【例 23】设

【09 年真题】

名师答案：8

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 3) = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 1 = 8$$

二 函数的间断点

如果函数 $Y=f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

判断间断点的方法

- (1) 没有定义的点
- (2) 极限不存在的点
- (3) 极限值不等于函数值的点

三 函数在一点处连续的性质 (忽略)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

【例 24】函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ 的间断点是
名师解析:

$$x = 3$$

四 闭区间上连续函数的性质 (了解)

介值定理主要用于证明方程的根的存在性

设有方程 $f(x)=0$, 如果 $f(a)f(b)<0$,

则该方程在开区间 (a, b) 内至少有一实根

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分

一 导数的概念

1 导数的定义

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) = \frac{dy}{dx} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

2 左导数与右导数

与左极限和右极限一样

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$$

【例 1】设

$$f'(0)$$

求

名师解析:

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{f(0 + 2x) - f(0)}{2x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

【例2】设 $f(0)=0$, 且极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$

$A, f'(x); B, 2f'(0); C, f(0); D, \frac{1}{2}f'(0)$

名师解答: B

名师解析:

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + 2x) - f(0)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} &= 2f'(0)
 \end{aligned}$$

3 导数的几何意义

函数在某一点的导数的几何意义等于过该点所对应曲线上一点的切线的斜率

4 可导与连续的关系 (了解)

可导一定连续, 连续不一定可导

【例3】求 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 的切线方程

【17年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned}
 y' &= 2e^{2x} - 4 \Rightarrow k = -2 \\
 \Rightarrow y - 1 &= -2x \Rightarrow y + 2x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

【例4】求 $y = x^3 + 2x$ 在点 $(1, 3)$ 的法线方程

【18年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned}
 y' &= 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 5 = k_{\text{切}} \\
 \Rightarrow k_{\text{法}} &= -\frac{1}{5} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 3)
 \end{aligned}$$

二 求导公式

1 基本初等函数的导数公式 (熟记)

2 导数的四则运算公式 (熟记)

$$f(x) = x \ln x \quad \text{求 } f'(e)$$

【例5】设

求

名师解析:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(e) = 2$$

$$f(x) = x^2 - e^2 \quad \text{求 } f'(x)$$

【例6】设

求

名师解析:

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{求 } f'(x)$$

【例7】设

求

名师解析:

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$$

$$= \frac{e^x (x - 1)}{x^2}$$

【例8】下列函数中在 $x=0$ 处不可导的是

【17年真题】

$$A, y = \sqrt[3]{x^5}; B, y = \sqrt[5]{x^3}$$

$$C, y = \sin x; D, y = x^2$$

名师解答: B

名师解析:

$$y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} (x \neq 0)$$

3 复合函数求导公式

$$y = f[g(x)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)g'(x) \\ &= f'[g(x)]g'(x) \end{aligned}$$

复合函数求导的步骤

- (1) 复合函数的分解
- (2) 代入复合函数求导公式
- (3) 等量代换, 消去中间变量

【例9】设 $f(x) = 5^x$ 求 $f'(x)$

【18年真题】

名师解析:

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

【例10】设 $y = x - \arctan x$ 求 $f'(x)$

【18年真题】

名师解析: $y' = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

【例11】设 $y = \sqrt{1+x^2}$ 求 y'

名师解析:

$$y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} y' = \sqrt{u} \\ u = 1+x^2 \end{cases} \\ \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

【例12】设 $y = xe^{2x}$ 求 y' 【16年真题】

名师解析:

$$y' = x'e^{2x} + x(e^{2x})' \\ = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

4 分段函数的求导 (忽略)

三 隐函数的求导 (本质上还是复合函数的求导)

$$x^2 + 3y^4 + x + 2y = 1 \quad \text{求 } y'$$

【例13】已知

名师解析:

$$x^2 + 3y^4 + x + 2y = 1$$

$$2x + 12y^3 y' + 1 + 2y' = 0$$

$$(12y^3 + 2)y' = -1 - 2x$$

$$y' = \frac{-1 - 2x}{12y^3 + 2}$$

【例14】已知 $\cos(x+y) + y = 1$ 求 y'

名师解析: $\cos(x+y) + y = 1$

$$-\sin(x+y)(x+y)' + y' = 0$$

$$-y' \sin(x+y) - \sin(x+y) + y' = 0$$

$$y' = \frac{\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)}$$

四 对数求导法 (忽略)

五 高阶导数

【例 15】已知 $y = \sin(1-x)$ 求 $f''(1)$

【17 年真题】

名师解析：

$$y' = -\cos(1-x) \Rightarrow y'' = -\sin(1-x)$$

$$f''(1) = 0$$

【例 16】已知 $y = \cos(1+2x)$ 求 $f'''(0)$

【17 年真题】

$$y' = -2\sin(1+2x) \Rightarrow y'' = -4\cos(1+2x)$$

$$\Rightarrow y''' = 8\sin(1+2x) \Rightarrow f'''(0) = 8\sin 1$$

名师解析：

【例 17】已知 $y = 2x + \ln(3x+2)$ 求 $f''(0)$

【18 年真题】

名师解析：

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{3x+2}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{(3x+2)^2}$$

$$f''(0) = \frac{-9}{8}$$

六 微分

1 微分的定义

已知

2 微分的几何意义 (忽略)

3 可微与可导 4 (忽略)

4 微分的基本公式 (忽略)

5 微分的四则运算 (忽略)

6 微分形式的不变性 (忽略)

【例 18】求 $y = 1 + \cos x$ 的微分

【18 年真题】

名师解析：

$$dy = (1 + \cos x)' dx$$

$$= -\sin x dx$$

【例19】已知 $y = e^{2x}$ 求 dy

【18年真题】

A, $e^{2x} dx$ B, $2e^{2x} dx$

C, $\frac{1}{2}e^{2x} dx$ D, $2e^x dx$

名师解答： B

名师解析： $y' = 2e^{2x} \Rightarrow dy = 2e^{2x} dx$

【例20】已知 $y = \sin x^2 + 2x$ 求 dy

【13年真题】

名师解析：

$$y' = 2x \cos x^2 + 2$$
$$\Rightarrow dy = (2x \cos x^2 + 2) dx$$

【例21】已知 $y = e^{\sin x}$ 求 dy

【09年真题】

名师解析：

$$y' = \cos x e^{\sin x} \Rightarrow dy = \cos x e^{\sin x} dx$$

第二节 洛必达法则 (重点)

1 条件

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\infty}$$

2 法则

$$\lim_{\text{条件}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\text{条件}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$$

【例22】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2}$

名师解析：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^{-x}}{2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + xe^x + e^{-x}}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

【例 23】计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x}$$

名师解析：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{\sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} - e^x}{\cos x} \\&= -2\end{aligned}$$

【例 24】计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\ln(1+x)}$$

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$$

【例 25】计算

【18 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 4x}{2x} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

【例 26】计算

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

【例 27】计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1
 \end{aligned}$$

第三节 导数的应用

一 函数的单调性

定理 设 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 且可导

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \end{cases}$$

判断函数单调性的步骤

- (1) 求出定义域
- (2) 求出一阶导数, 令一阶导数等于 0, 求出驻点和一阶导数不存在的点
- (3) 划分区间判断

【例28】求函数 $y = x - \ln x$ 的单调区间

名师解析: 1) $x > 0$

$$2) y' = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$3) \begin{cases} 0 < x < 1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow y \downarrow \\ x > 1 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y \uparrow \end{cases}$$

【例29】函数 $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间

【17年真题】

$$A, (-\infty, -1); B, (-1, 0); C, (0, 1); D, (1, +\infty)$$

名师解答：A

名师解析：(1) $x^2 + 2x + 2 > 0 \Rightarrow R$

$$(2) y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(3) (-\infty, -1), (-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow (-\infty, -1) \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow \downarrow$$

【例30】求函数 $y = \frac{x}{\ln x}$ 的单调增加区间

名师解析：1) $x > 0$ 且 $x \neq 1$

$$2) y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow x = e$$

$$3) e < x \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow y \uparrow$$

二 函数的极值

定义；局部的最值

判定；必要条件；极值点一定是一阶导数为0的点或导数不存在的点。

第一充分条件；根据一阶导数符号判断

第二充分条件；根据二阶导数符号判断

判断函数单调性和极值的步骤

(1) 求出定义域

(2) 求一阶导数等于0的点和导数不存在的点

(3) 用第一充分条件或第二充分条件判断

【例31】求函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 的极大值

名师解析：1) R

$$2) y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$3) y'' = 6x - 6$$

$$f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow f(-1) = 5$$

【例32】求函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值

【18年真题】

名师解析：

$$y' = x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$y'' = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y'' = -1 < 0 \Rightarrow \text{极大值} 5 \\ x_2 = 1 \Rightarrow y'' = 1 > 0 \Rightarrow \text{极小值} 4\frac{5}{6} \end{cases}$$

三 曲线的凹凸性

定理 设 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cup \\ f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \cap \end{cases}$$

四 曲线的拐点

定义；凹凸区间的分界点

求法；利用二阶导数的符号判断

判断函数凹凸性和拐点的步骤

(1) 求定义域

(2) 求二阶导数，并求出二阶导数等于0的点

(3) 划分区间判断

五 曲线的渐近线；函数图像无限接近的直线

渐近线的求法；

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \Rightarrow y = c \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow x = x_0 \end{cases}$$

六 函数的最大值和最小值

函数最值的定义；整个定义域内的最大值或最小值

函数最值的求法；

- (1) 求出一阶导数等于0的点和导数不存在的点所对应的值
- (2) 求出定义域的端点所对应的值
- (3) 比较上述点的大小。

【例33】 求 $y = 6x - 24x^2 + x^4$ 的凸区间

名师解析：1) R

$$20y' = 6 - 48x + 4x^3$$

$$y'' = -48 + 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$$3) (-\infty, -2); (-2, 2), (2, +\infty)$$

$$4) f''(-3) = 60 > 0 \Rightarrow \cup$$

$$f''(0) = -48 < 0 \Rightarrow \cap$$

$$f''(3) = 60 > 0 \Rightarrow \cup$$

【例34】 求函数 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点

【18年真题】

名师解析：1) R

$$2) y' = 3x^2 - 12x + 3$$

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3) (-\infty, 2); y'' < 0$$

$$(2, +\infty); y'' > 0$$

$$\text{拐点}; (2, -6)$$

【例35】求函数 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间

【17年真题】

$$A, (-\infty, 1); B, (-\infty, 2); C, (1, +\infty); D, (2, +\infty)$$

名师解答： A

名师解析： (1) R

$$(2)y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(3)(-\infty, 1); (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow (-\infty, 1) \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow \cap$$

【例36】函数 $y = x^4 - 4x + 1$

【17年真题】

(1) 求单调区间和极值

(2) 求凹凸区间

名师解析： (1) R

$$(2)y' = 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$y'' = 12x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$(3)(-\infty, 0); (0, 1); (1, +\infty)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-		-	极小点	+
y''	+		+		+
y	↓ U		↓ U	-2 极小值	↑ U

$$y = \frac{x+1}{2x+1}$$

【例 37】求曲线 的水平渐近线

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2+x}$$

【例 38】求曲线 的垂直渐近线

名师解析：

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{2+x} = \infty \Rightarrow x = -2$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$$

【例 39】求 在区间【0,4】的最值

名师解析：

$$y' = x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 9; f(0) = 0; f(4) = \frac{28}{3}$$

所以最大值是 28/3，最小值是 0

【例 40】用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形的有盖桶，证明当圆柱的高等于底面直径的时候使用的铁皮面积最小

名师解析：证明；设高位 h，底面半径为 r，表面积 S

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$$

$$= 2\pi r^2 + 2 \frac{V}{r}$$

$$S' = 4\pi r - 2 \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow h = 2r$$

$$(1+x)\ln(1+x) > x$$

【例 41】证明；当 $x > 0$

名师解析：证明：

$$(1+x)\ln(1+x) - x > 0$$

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1$$

$$= \ln(1+x)$$

$$\text{因为 } x > 0; \ln(1+x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \uparrow$$

$$\text{当 } x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(1+x)\ln(1+x) > x$$

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

一 不定积分

$$F'(x) = f(x)$$

1 原函数

如: ~~$(\sin x)' = \cos x$~~ ,

所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数

~~$(\sin x + 3)' = \cos x$~~ ,

所以 $\sin x + 3$ 是 $\cos x$ 的一个原函数

2 不定积分

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

3 不定积分的性质

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$(2) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$(3) \left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$$

$$(4) \int f'(x)dx = f(x) + c$$

【例 1】 $y = e^{2x}$ 的原函数是

A, e^x B, $\frac{1}{2}e^{2x}$

C, e^{2x} D, $2e^{2x}$

名师解答: B

名师解析:

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$$

【例2】已知 $f(x) = \sin x$ 则 $\int f'(x)dx =$

- A, $\sin x + c$ B, $\cos x + c$
C, $-\sin x + c$ D, $-\cos x + c$

名师解答：A

名师解析： $\int f'(x)dx = f(x) + c$

【例3】已知 x^2 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) =$

名师解析：

$$f(x) = (x^2)' = 2x$$

【例4】已知 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)dx =$

【17年真题】

名师解析：

$$\int f(x)dx = \tan x + c$$

4 不定积分的基本公式（一定要熟记）

5 直接积分法

利用积分基本公式和性质结合代数和三角的恒等变形进行积分的方法。

$$\int x\sqrt{x}dx$$

【例5】求不定积分

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int x\sqrt{x}dx &= \int xx^{\frac{1}{2}}dx \\
 &= \int x^{\frac{3}{2}}dx \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C
 \end{aligned}$$

【例6】 $\int (2x+3)dx$

【18年真题】

名师解析：

$$\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + c$$

【例7】 $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
 &= 2 \arcsin x + c
 \end{aligned}$$

【例8】 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx =$

【17年真题】

$$\begin{aligned}
 &A, \frac{2}{\sqrt{x}} + C; B, -\frac{2}{\sqrt{x}} + C \\
 &C, \frac{2}{5}\sqrt{x^3} + C; D, -\frac{2}{5}\sqrt{x^3} + C
 \end{aligned}$$

名师解答： B

名师解析：

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

二 换元积分法

1 第一换元积分法

$$\int g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$$

$$= \int g[\varphi(x)] d\varphi(x)$$

$$= \int g(u) du$$

$$= F(u) + C$$

$$= F[\varphi(x)] + C$$

$$\int (2x+1)^{10} dx =$$

【例9】

名师解析：

$$\int (2x+1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + C$$

【例10】 $\int \frac{1}{2-x} dx$

【18年真题】

$$A, \ln|2-x|+c; B, -\ln|2-x|+c$$

$$C, -\frac{1}{(2-x)^2}+c; D, \frac{1}{(2-x)^2}+c$$

名师解答： B

名师解析：

$$\int \frac{1}{2-x} dx = -\int \frac{1}{2-x} d(2-x)$$

$$\text{设 } u = 2-x$$

$$= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|2-x|+c$$

【例 11】 $\int x e^{x^2} dx =$

名师解析：

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2$$

$$\underline{\underline{x^2 = u}} \quad \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\underline{\underline{u = x^2}} \quad \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

【例 12】

【18 年真题】

名师解答： A

名师解析：

$$\int \frac{\ln x}{x} dx =$$

【例 13】

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \ln x d \ln x \\ &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

【例 14】

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln(1+e^x) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

【例 15】

名师解析：

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx = \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) \\ = -\cos \left(\frac{1}{x}\right) + C$$

【例 16】 $\int \cos^2 x dx$

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C ; \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x+x^2} dx$$

【例 17】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{x+x^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{x(1+x)} dx \\
 &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \ln|x| - \ln|1+x| + c
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

【例 18】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^{-\sqrt{x}} d\sqrt{x} \\
 &= -2 \int e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) \\
 &= -2e^{-\sqrt{x}} + c
 \end{aligned}$$

【例 19】 $\int x \cos x^2 dx$ 【16 年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}
 \int x \cos x^2 dx &= \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sin x^2 + c
 \end{aligned}$$

2. 第二换元积分法

解决对象；被积函数含有根号

解决思路；去掉根号

解决方法；简单根式代换

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

【例 20】

名师解析：

解令变量 $t = \sqrt{x}$ 则 ~~$x = t^2$~~

从而微分 ~~$dx = 2t dt$~~

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{t^2 + t} \cdot 2t dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \ln|t+1| + C \\ &= 2 \ln(\sqrt{x}+1) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

【例 21】

【17 年真题】

名师解析：

$$t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = t^3$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3t^2}{1+t} dt \\ &= \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt = \int (t-1) dt + \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 - t + \ln|1+t| + c \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \ln|1 + \sqrt[3]{x}| + c \end{aligned}$$

三 分部积分法

公式： $\int u dv = uv - \int v du$

注意：(1) v 要用凑微分容易求出

(2) $\int v du$ 比 $\int u dv$ 容易求

解决对象(其中 m, n 都是正整数).

$$x^m \sin x \quad x^n \cos x$$

$$e^{mx} \sin x \quad e^{nx} \cos x$$

$$x^m e^{nx} \quad x^n \ln x$$

$$x^m \arcsin x \quad x^n \arccos x \quad x^m \arctan x$$

【例22】已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$

名师解析:

$$\begin{aligned} & \int x f'(x) dx \\ &= \int x df(x) \\ &= x f(x) - \int f(x) dx \\ & (\sin x)' = f(x) \\ &= x \cos x - \sin x + C \end{aligned}$$

【例23】 $\int x \cos x dx$ 【12, 18年真题】

$$\begin{aligned} \text{名师解析: } \int x \cos x dx &= \int x d \sin x \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

【例24】 $\int \ln x dx$

名师解析：
$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int x d(\ln x) \\ &= x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

【例25】 $\int x e^x dx$

名师解析：
$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x d e^x \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c\end{aligned}$$

【例26】 $\int \arcsin x dx =$ 【12年真题】

名师解析：
$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d \arcsin x \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

四 一些简单有理函数的积分

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

【例 27】

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx &= \int \frac{1}{(x+2)(x-1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x-1| - \ln|x+2|) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

【例 28】

名师解析：

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} d(x+1) \\ &= \arctan(1+x) + c \end{aligned}$$

第二节 定积分

一 定积分的概念

1 定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数,

$f(x)dx$ 叫做被积表达式,

x 叫做积分变量,

$[a,b]$ 叫做积分区间.

2 定积分的存在定理 (忽略)

二 定积分的性质 (只要关注这 6 条)

两点补充规定: (a) 当 $a=b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = 0$

(b) 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

性质 1 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

性质 2 $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k 为常数).

性质 3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

性质 4 : 如果被积函数是奇函数, 积分区间是对称的, 定积分为 0

【例 29】

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x)dx =$$

名师解析: 0

【例 30】 $\int_{-1}^1 x|x|dx$ 【15 年真题】

名师解析: 0

【例 31】 $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2)dx$ 【18 年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^5 + x^2)dx \\ &= \int_{-1}^1 x^5 dx + \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

三 定积分的计算

1 变上限积分

$$\int_a^x f(t)dt$$

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$\int_a^x f(t)dt$$

【例32】设函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ 则 $f'(0)$

名师解析:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' \\ &= e^{x^2} \\ f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

【例33】 $\frac{d}{dx} \int_x^5 (t^2 + e^t) dt$

名师解析:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^5 (t^2 + e^t) dt \\ &= \frac{d}{dx} \left(- \int_5^x (t^2 + e^t) dt \right) \\ &= -(x^2 + e^x) \end{aligned}$$

【例34】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}$ 【18年真题】

名师解析:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2 牛顿——莱布尼茨公式

若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在
区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

~~$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$~~

3 定积分的换元积分法和分部积分法 (忽略)

【例35】 $\int_0^1 2^x dx$ 【17年真题】

$A, \ln 2; B, 2 \ln 2; C, \frac{1}{\ln 2}; D, \frac{2}{\ln 2}$

名师解答: C

名师解析:

$$\int_0^1 2^x dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

【例36】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx$ 【17年真题】

名师解析:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \left. \frac{1}{3} \sin 3x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$$

【例37】 $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx =$

名师解析： $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_1^e (1+\ln x) d(1+\ln x)$
 $= \frac{1}{2} (1+\ln x)^2 \Big|_1^e = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

【例38】 $\int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx$ 【18年真题】

名师解析： $\int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^\pi$
 $= -2(0 - 1) = 2$

【例39】 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1 \\ 5, & 1 < x \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x) dx$

名师解析： $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$
 $= \int_0^1 2x dx + \int_1^2 5 dx = 6.$

【例40】 $\int_0^1 |2x-1| dx$

名师解析：解 因为 $|2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |2x-1| dx &= \int_0^{1/2} (1-2x) dx + \int_{1/2}^1 (2x-1) dx \\ &= (x-x^2) \Big|_0^{1/2} + (x^2-x) \Big|_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例41】 $\int_0^1 x \arctan x dx$ 【17年真题】

名师解析： $\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int x^2 d \arctan x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + c \\ \text{原式} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

【例42】 $\int_0^2 x e^{x^2} dx =$

名师解析：解一 $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} dx^2$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

解二 $\int_0^2 x e^x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^x dx$

$$\begin{aligned} \text{令 } u &= x-2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du \\ &= \frac{1}{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

【例 43】 $\int_1^e \ln x dx =$

【14 年真题】

名师解析：

$$\int_1^e \ln x dx$$

$$= \left. \ln x \cdot x \right|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx =$$

【例 44】

名师解析：

$$\int_0^{\pi} x \sin x = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

$$= \left. x \cos x + \sin x \right|_0^{\pi}$$

$$= \pi \cos \pi + \sin \pi = -\pi$$

四 无穷区间上的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

【例 45】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$

【18 年真题】

名师解析：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) - (-e^0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) + 1$$

$$= 1$$

【例 46】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

【16, 17 年真题】

名师解析：

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = -(0-1) = 1$$

第三节 定积分的应用

一 计算平面图形的面积

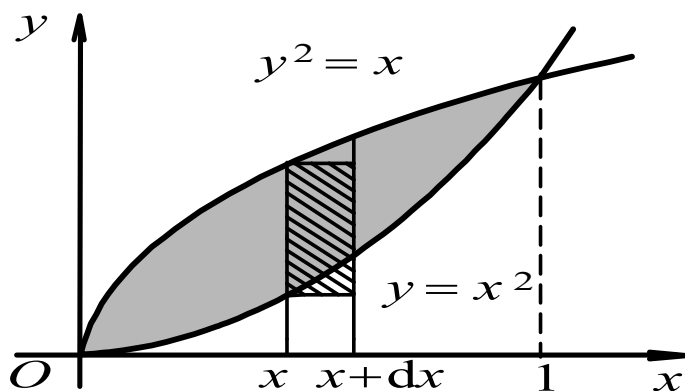
微元法

(1) 根据具体问题, 选取一个积分变量, 如 x 为积分变量, 在它的变化区间 $[a, b]$ 取一个区间微元 $[x, x+dx]$, 求出面积的近似值 dA

(2) 根据 dA 写出

【例 47】

求由 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



名师解析:

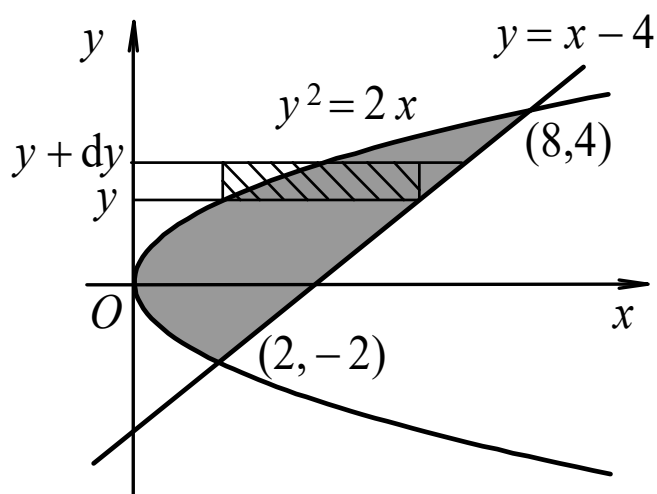
面积微元: dA

所求面积: A

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

求曲线 $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 所围图形的面积.

【例 48】



名师解析:

解由方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得两条曲线

的交点坐标为 ~~(2, -2)~~, ~~(8, 4)~~,

取 y 为积分变量, ~~$y \in [2, 4]$~~ .

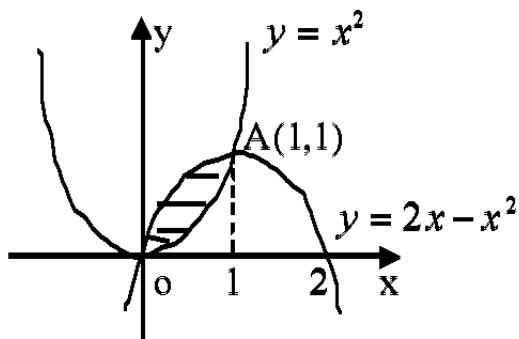
将两曲线方程分别改写为

~~$x = \frac{1}{2}y^2$ 及 $y = x - 4$~~ 得所求面积为

$$\int_{-2}^4 (x - 4 + \frac{1}{2}y^2)$$

$$= (\frac{1}{2}y^2 - 4y + \frac{1}{6}y^3) \Big|_{-2}^4 = 18.$$

【例49】求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2x - x^2$ 所围图形的面积.

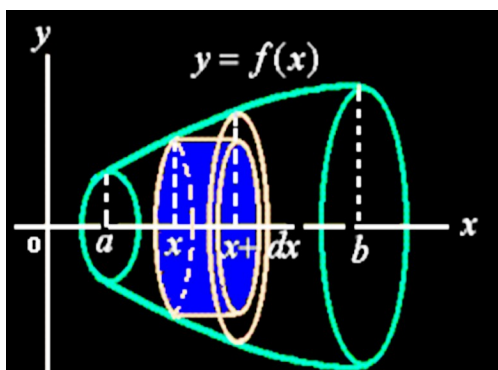


名师解析:

解 由方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-x^2 \end{cases}$, 得两条曲线的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 取 x 为积分变量, $x \in [0,1]$, 由公式得

$$S = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

二 求旋转体的体积



体积元素为 $dV = \pi [f(x)]^2 dx$

所求体积为 $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

【例 50】设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$

则 D 绕 x

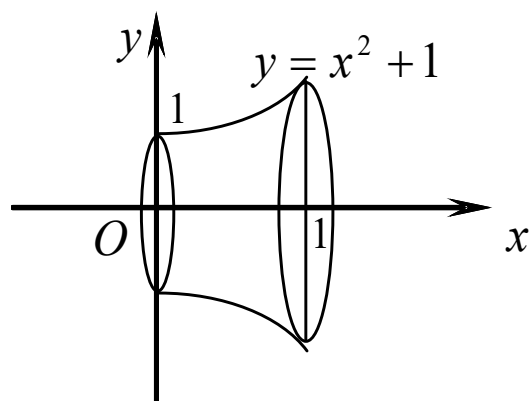
轴旋转一周所得旋转体的体积

【18 年真题】

名师解析：

$$V = \int_0^1 \pi (x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

【例 51】求由曲线 $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得体积

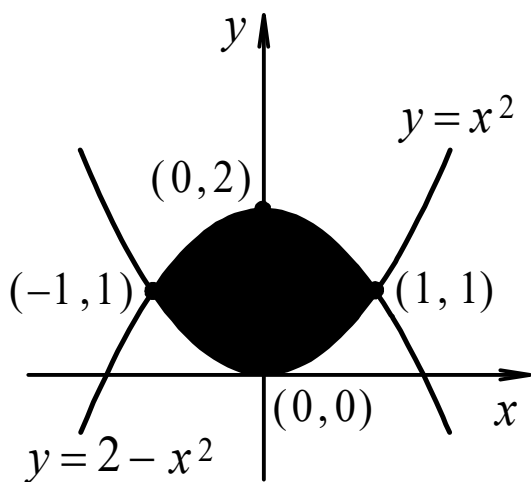


名师解析：

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad V &= \int_0^1 \pi (x^2 + 1)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{28}{15} \pi . \end{aligned}$$

【例 52】求由曲线 $y = x^2, y = 2 - x^2$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得体积



名师解析:

解 由方程组
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$$

解得交点为 $(-1, 1)$ 及 $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^1 [(2-x^2)^2 - x^4] dx \\ &= 8\pi \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

【例 53】曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, y = 2$ 所围成的图形

- 1 求所围成的面积
- 2 求此图形绕 y 轴旋转一周所得体积

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

名师解析:

$$S: \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = 2\sqrt{3}$$

$$V: \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi \left(\sqrt{2\left(y - \frac{1}{2}\right)} \right)^2 dy = \frac{9}{4}\pi$$

第四章 多元函数微分学

一 多元函数的概念

- 1 多元函数的定义 (忽略)
- 2 二元函数的几何意义 (忽略)

3 二元函数的定义域 (忽略)

二 偏导数与全微分

1 偏导数的定义 (忽略)

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

2 偏导数的求法; 函数对某一变量求偏导时把这一变量作为变量, 其他变量作为常数看待利用一元微分学的公式, 法则, 定理求。

【例1】设二元函数 $z = x^2y + x \sin y$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A $2xy + \sin y$ B $x^2 + x \cos y$

C $2xy + x \sin y$ D $x^2y + \sin y$

名师解答: A

【例2】设二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 则 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$

A 1 B 2

C $x^2 + y^2$ D $\frac{1}{x^2 + y^2}$

名师解答: A

名师解析: $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}})^2 + (\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}})^2$
 $= 1$

【例3】设二元函数 $z = x^2y + 3x + 2y$ 则

【18年真题】

名师解析: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3$

【例4】设二元函数 $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$

名师解析:
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x + \frac{y}{2x}} \left(1 - \frac{y}{2x^2}\right) = \frac{2x}{2x^2 + y} \left(\frac{2x^2 - y}{2x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2x^2 + y} \left(\frac{2x^2 - y}{x}\right) \\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} &= \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

【例5】设二元函数 $z = e^{x^2+y}$ 则下列各式正确的是

【17年真题】

$A, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2}; B, \frac{\partial z}{\partial y} = e^y; C, \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}; D, \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

名师解答: D

名师解析: $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y} (x^2 + y)' = e^{x^2+y}$

【例6】设二元函数 $z = \sin(x + 2y)$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

【16年真题】

名师解析:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos(x+2y)(x+2y)' \\ &= \cos(x+2y)\end{aligned}$$

$$z = e^{\frac{y}{x}} \text{ 求 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)}$$

【例7】设二元函数

【15年真题】

名师解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = -e$$

3 全微分的概念

函数 ~~$z = f(x, y)$~~ 的全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

4 全微分的求法；先求出两个偏导数，代入上面公式即可。

【例8】设二元函数 $z = x^2 + 2xy$ 则 dz

名师解析： $dz = (2x + 2y)dx + 2xdy$

【例9】设二元函数 $z = \frac{u}{v}, u = x^2y, v = x + y^2$ 则 dz

【17年真题】

名师解析：

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{v} 2xy - \frac{u}{v^2} = \frac{2xy}{x+y^2} - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{v} x^2 - \frac{u}{v^2} 2y = \frac{x^2}{x+y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x+y^2)^2} \\ dz &= \left[\frac{2xy}{x+y^2} - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2} \right] dx + \left[\frac{x^2}{x+y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x+y^2)^2} \right] dy\end{aligned}$$

【例10】求函数 $z = e^{xy}$ 在点 (2,1) 处的全微分

名师解析: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = e^2, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = 2e^2,$$

$$dz = e^2 dx + 2e^2 dy.$$

5 二阶偏导数

【例 11】

设 ~~$z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$~~ , 求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

名师解析:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy$$

【例12】设 $z = x^2 y^2$ 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$
【18年真题】

名师解析： $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$

三 复合函数的偏导数

设 $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

【例13】设 $z = (2x + y)^{2x+y}$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$

名师解析：设； $u = 2x + y; v = 2x + y \Rightarrow z = u^v$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= vu^{v-1} \cdot 2 + u^v \ln u \cdot 2 \\ &= 2(2x + y)^{2x+y} [\ln(2x + y) + 1]\end{aligned}$$

四 隐函数的微分法

1、一元隐函数

前面已经讨论了

2、二元隐函数

设方程 ~~$F(x, y) = 0$~~ 确定函数 ~~$y = f(x)$~~

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial y}$$

【例13】设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

名师解析：令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则

$$F_x = 2x, F_z = 2z - 4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2 - z},$$

【例14】设函数 $y = f(x)$ 由 $e^y = x + y$ 所确定,
求 $\frac{dy}{dx}$ 【17年真题】

名师解析: $e^y = x + y$

$$y'e^y = 1 + y' \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y - 1}$$

五 二元函数的极值

1 二元函数极值的概念 (忽略)

2 二元函数无条件极值的计算

第一步 解方程组 

求出 $f(x, y)$ 的所有驻点;

第二步 求出函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数,

依次确定各驻点处 A 、 B 、 C 的值, 并

根据 A 、 B 、 C 的符号判定驻点是否为极值点.



(1) 当 $A < 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处有极值,

$A < 0$ 时有极小值 $f(x_0, y_0)$;

$A > 0$ 时有极大值 $f(x_0, y_0)$;

(2) 当 $A = 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处没有极值;

(3) 当 $A = 0$ 时, 无法判断.

【例15】设 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 求极值

名师解析:
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

先解方程组解得驻点为

$$(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2).$$

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6,$$

$$f_{xx}(x, y) = 0,$$

$$f_{yy}(x, y) = -6y + 6$$

在点 $(1, 0)$ 处, $f_{xx}(1, 0) = 12 > 0$

故函数在该点处有极小值 -6

在点 $(1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$ 处, $f_{xx}(x, y) = 0$

故函数在这两点处没有极值;

在点 $(-3, 2)$ 处, $f_{yy}(-3, 2) = -6 < 0$ 又 $f_{xx}(-3, 2) = 0$

故函数在该点处有极大值 6

【例16】设 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$ 求极值

名师解析:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, y = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$$A = 2, B = 1, C = 2$$

$$B^2 - AC = -3 < 0, A > 0 \Rightarrow \text{极小值} -6$$

【例17】二元函数 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ 驻点坐标是

【17年真题】

$$A, \left(-\frac{3}{2}, -1\right); B, \left(-\frac{3}{2}, 1\right); C, \left(\frac{3}{2}, -1\right); D, \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

名师解答: D

$$\text{名师解析: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 \Rightarrow y = 1$$

3 二元函数的条件极值

前面所讨论的极值问题, 对于函数的自变量无其它限制条件, 这类极值称为无条件极值. 但在实际问题中, 常会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题, 称为条件极值.

拉格朗日乘数法

求函数 $f(x, y)$ 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 的

极值的拉格朗日乘数法的基本步骤为:

(1) 构造拉格朗日函数

$L = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$ λ 为常数;

(2) 由方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda \phi_x(x, y) = 0 \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda \phi_y(x, y) = 0 \\ L_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases} \text{解出 } x, y, \lambda$$

【例18】求函数 $z = x^2 + y^2$ 在条件 $2x + 3y = 1$ 下的极值

【13年真题】

名师解析: $w = x^2 + y^2 + \lambda(2x + 3y - 1)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{13} \\ y = \frac{3}{13} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right) = \frac{1}{13}$$

第五章 排列与组合

一 两个基本原理

1 加法原理

完成某项工作有 n 类不同的方式, 第一类方式有 m_1 种方法第二类方式有 m_2 种方法, 第 n 类方式有 m_n 种方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 不同的方法

2 乘法原理

完成某项工作有 n 个不同的步骤, 第一个步骤有 m_1 种方法第二个步骤有 m_2 种方法, 第 n 个步骤有 m_n 种方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \dots m_n$ 不同的方法

二 排列与组合

1 排列

从 n 个不同的元素里, 任取 m 个元素, 按照一定的顺序排成一行, 记作

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

2 组合

从 n 个不同的元素里, 任取 m 个元素组成一组

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m}$$

记作

3 排列与组合的关系

排列与顺序有关, 组合与顺序无关

【例1】10个人, 每2个人之间写一封信, 问共写多少封不同的信? 每2个人之间打一个电话, 问共打多少个不同的电话?

名师解析:

$$P_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$$

$$C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$$

【例2】袋中有10个球, 6个白的, 4个黄的从中任取4个

(1) 任取的4个球中, 有且只有1个黄球

(2) 任取的 4 个球中, 至少有 1 个黄球

名师解析:

$$(1) C_6^3 C_4^1 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times 4 = 80$$

$$(2) C_{10}^4 - C_6^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 195$$

【例 3】袋中有 10 个球, 每个球上有一个数字, 其中有 2 个 5, 3 个 2, 5 个 1, 从中任取 5 个, 求这 5 个球上的数字之和超过 10 的取法有多少种?

名师解析:

$$C_2^2 C_8^3 + C_2^1 C_3^3 C_5^1 + C_2^1 C_3^2 C_5^2 = 126$$

【例 4】6 人排成一列, 求下列情况的排列数

(1) 甲, 乙两人必须排在头尾

(2) 甲, 乙两人不能排在头尾

(3) 甲, 乙两人必须间隔 1 人排列

名师解析:

$$(1) 2 P_4^4 = 48$$

$$(2) P_4^2 P_4^4 = 288$$

$$(3) 4 \times 2 P_4^4 = 192$$

第六章 概率论初步

第一节 随机事件

一 随机事件

1 确定性现象; 在一定条件下, 必然会发生某种结果的现象

2 随机现象; 在一定条件下, 事先不能断言会出现哪种结果的现象

二 随机实验和随机事件

随机实验 (忽略)

随机事件; 随机实验中可能出现结果

基本事件; (忽略)

复合事件; (忽略)

必然事件; 一定会发生的, 记作

不可能事件; 一定不会发生的, 记作

样本点; 随机实验的每一个可能的结果

样本空间; 所有样本点组成的集合

二 随机事件的关系和运算

1 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 那么称事件 A 包含于事件 B, 记作

如: A=活到 60 岁的人 B=活到 70 岁的人

$$B \subset A$$

如; A=用了 100 小时 B=用了 200 小时

$$B \subset A$$

2 事件的相等 (忽略)

3 事件的和

两个事件 A 与 B 中至少有一个会发生, 叫做

A 与 B 的和事件, 记作

如; A=甲射中目标 B=乙射中目标 C=目标被射中

$$C=A+B$$

如; A=直径不合格 B=长度不合格 C=产品不合格

$$C=A+B$$

4 事件的积

两个事件 A 与 B 同时发生, 叫做 A 与 B 的积事件,

记作 AB 或 $A \cap B$

如; A=体育爱好者 B=文艺爱好者 C=文体爱好者

$$C=AB$$

如; A=直径合格 B=长度合格 C=产品合格

$$C=AB$$

5 事件的互斥 (互不相容)

两个事件 A 与 B 不能同时发生, 叫做 A 与 B 互斥,

记作 $AB = \Phi$

如; A=小王生于 1985 年 B=小王生于 1988 年

$$AB = \Phi$$

如; A=他在教室 B=他在图书馆

$$AB = \Phi$$

6 对立事件

$$\begin{cases} AB = \Phi \\ A \cup B = \Omega \end{cases}$$

如; A=小王考试及格 B=小王考试不及格

如; A=他射中目标 B=他没有射中目标

7 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生, 称作事件 A 与 B

的差。记作 $A - B$ 或 $\overline{AB}$

$$P(A - B) = \begin{cases} P(A) - P(AB) \\ P(A) - P(B) \end{cases}$$

8 事件的运算规则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

【例 1】下列各事件的关系正确的是

$$A, \overline{AB} = A + B; B, (A + B) - A = B$$

$$C, A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}; D, \overline{(A + B)C} = \overline{ABC}$$

名师解答: C

名师解析：根据文氏图判断

【例 2】任意 3 个随机事件 A,B,C 中至少有一个发生的事件可表示为

【09 年真题】

A, $A \cup B \cup C$; B, $A \cup B \cap C$

C, $A \cap B \cap C$; D, $A \cap B \cup C$

名师解答：A

名师解析：根据事件的和的定义

【例 3】下列结论正确的是

A 若 $A+B=\Omega$ 则 A,B 互为对立事件

B 若 A,B 为互不相容事件, 则 A,B 互为对立事件

C 若 A,B 为互不相容事件, 则 A,B 也互不相容

D 若 A,B 为互不相容事件, 则 $A-B=A$

名师解答：D

名师解析：根据文氏图判断

【例 4】用 A 表示事件“甲通过且乙没有通过” 则对立事件 $\bar{A}$

A 甲不通过, 乙通过

B 甲乙都通过

C 甲不通过

D 甲不通过或乙通过

名师解答：D

$\overline{\text{甲乙}} = \text{甲} \cup \text{乙}$

名师解析：

【例 5】设 A,B 是两个随机事件, 且相互独立, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, 则 $P(A-B)=$

【18 年真题】

A 0.24

B 0.36

C 0.4

D 0.6

名师解答：B

名师解析： $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=0.36$

第二节 事件的概率

一 概率的统计定义

1 概率概念的引入 (忽略)

2 概率的统计定义; 频率的极限

二 概率的古典定义

1 古典概型

(1) 有限性

(2) 等可能性

2 概率的古典定义

$P(A)=m/n$

m; 事件 A 包含的基本事件数

n; 实验的基本事件总数

3 概率的基本性质和加法公式

性质 1; (忽略)

性质 2; 关于事件的差的概率, 前面已经讲过

性质 3; $P(A+B)=P(A)+P(B)-p(AB)$

推论 1; A,B 互不相容, $P(A+B)=P(A)+P(B)$

推论 2; $p(A)=1-P(\overline{A})$

【例 6】下列说法正确的是

A 若 A,B 为对立事件, 则 $p(\overline{AB})=0$

B 若 $p(AB)=0$, 则 $p(A)=0$ 或 $p(B)=0$

C 若 A 与 B 互不相容, 则 $p(A)=1-P(B)$

D 若 A 与 B 互斥, $p(\overline{A \cup B})=1$

名师解答: D

名师解析: $p(\overline{A \cup B})=p(\overline{AB})=1$

【例 7】若事件 A 与 B 互斥,

$p(A)=0.5, p(A \cup B)=0.8$, 则 $p(B)=$

A 0.3

B 0.4

C 0.2

D 0.1

名师解答: A

名师解析:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$\Rightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A)$$

$$= 0.8 - 0.5 = 0.3$$

【例 8】一个宿舍住了 4 名学生, 试求这 4 个学生出生的月份都不同的概率

名师解析:

$$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4} = \frac{55}{96}$$

【例 9】设事件 A 发生的概率是 0.6, 求事件 A 的对立事件的概率

【05,16 年真题】

名师解析:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

【例 10】5 人排成一排, 甲, 乙两人必须排在一起的概率

【07 年真题】

$$A, \frac{1}{5}; B, \frac{2}{5}; C, \frac{3}{5}; D, \frac{4}{5}$$

名师解答: B

名师解析:

$$\frac{2 \times P_4^4}{P_5^5} = \frac{2}{5}$$

【例 11】袋中有 12 个球，5 白 7 黑，从中任取 3 个球，求至少有一个黑球的概率

【07 年真题】

名师解析：

$$1 - \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

【例 12】设 A, B 是两个随机事件，则 A-B 表示

- A 事件 A, B 都发生
- B 事件 B 发生而 A 不发生
- C 事件 A 发生而 B 不发生
- D 事件 A, B 都不发生

【13 年真题】

名师解答： C

名师解析：根据事件的差的定义

第三节 条件概率，乘法公式，独立性

一 条件概率

定义；已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率记作 $p(A/B)$ ，称作在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

例如；甲乙两台车床加工同一种零件 100 个，其中甲加工 40 个，次品 5 个，乙加工 60 个，次品 10 个，求次品率和已知乙加工的条件下的次品率

解；设 A=“次品” B=“乙加工”

$$\begin{cases} p(A) = \frac{15}{100} \\ p(A/B) = \frac{10}{60} \end{cases} \Rightarrow p(A/B) = \frac{p(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{100}{60}}{\frac{100}{60}} = \frac{10}{60}$$

计算；（1）根据古典概率的公式计算

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{P(B)}$$

（2）

二 乘法公式

定义；

$$p(AB) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

$$P(ABC) = P(A/BC)P(BC)$$

$$= P(A/BC)P(B/C)P(C)$$

三 事件的独立性

1 两个事件的独立性

定义；如果 $p(AB) = P(A)P(B)$ 则称 A, B 相互独立

判断；（1）根据定义判断

(2) 根据经验判断

2 多个事件的独立性

$$p(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

定理; 如果 A, B 独立, 则 A 与 $\bar{B}$; $\bar{A}$ 与 B ; $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立

【例 13】若 A 与 B 的交是不可能事件, 则 A 与 B 一定是

A 对立事件

B 相互独立事件

C 互不相容事件

D 相等事件

名师解答: C

名师解析: $p(AB) = 0$

【例 14】若 A 与 B 满足 $p(B/A) = 1$, 则有

A A 是必然事件

B $p(B/\bar{A}) = 0$

C $B \subset A$

D $A \subset B$

名师解答: D

名师解析: $p(AB) = P(A)$

【例 15】若 A 与 B 是任意的两个事件, 下列结论正确的是

A 若 $AB \neq \Phi$ 则 A, B 一定独立

B 若 $AB \neq \Phi$ 则 A, B 有可能独立

C 若 $AB = \Phi$ 则 A, B 一定独立

D 若 $AB = \Phi$ 则 A, B 一定不独立

名师解答: B

名师解析: 排除法

【例 16】若 A 与 B 满足

$$P(A) = 0.4; P(B) = 0.2; P(B/A) = 0.5$$

则 $p(A+B)$

名师解析:

$$P(B/A) = 0.5 = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = 0.2$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ = 0.4 + 0.2 - 0.2 = 0.4$$

【例 17】若 A 与 B 满足

$$P(A) = 0.3; P(B) = 0.4; P(A/B) = 0.4;$$

则 $P(B/A) =$

名师解析:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.16}{0.3} = \frac{8}{15}$$

【例 18】若 A 与 B 相互独立, 且

$$P(A) = P(\bar{B}) = a - 1; P(A+B) = \frac{7}{9}$$

则 $a =$

名师解析:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{9}$$

$$(a-1) + [1 - (a-1)] - (a-1)[1 - (a-1)] = \frac{7}{9}$$

$$9a^2 - 27a + 20 = 0 \Rightarrow (3a-4)(3a-5) = 0$$

$$a = \frac{4}{3} \text{ 或 } a = \frac{5}{3}$$

【例 19】甲乙两人各自独立射击一次, 甲乙射中目标的概率分别为 0.8, 0.9, 则至少一人射中目标的概率是

A 0.98

B 0.9

C 0.8

D 0.72

名师解答: A

名师解析: 设 A=甲射中 B=乙射中

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - P(AB) \\ = 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98$$

【例 20】设事件 A, B 相互独立, A, B 发生的概率分别为 0.6, 0.9 则 A, B 都不发生的概率是

A 0.54

B 0.04

C 0.1

D 0.4

名师解答： B

名师解析：

$$\begin{aligned}P(\overline{AB}) &= P(\overline{A})P(\overline{B}) \\&= (1 - 0.6)(1 - 0.9) = 0.04\end{aligned}$$

第四节 一维随机变量及其数字特征

一 随机变量

1 随机变量的概念

定义；设 Ω 为样本空间，如果对每一个可能结果 $\omega \in \Omega$ ，变量 X 都有一个确定的实数值

$X(\omega)$ 与之对应，则称 X 为定义在 Ω 上的随机变量。

如；设 X 表示扔骰子出现的点数

$X=1$ 表示出现 1 点

$X>3$ 表示出现的点数 4,5,6

$(X=2+X=4+X=6)$ 表示出现偶数点

如；设 X 表示抛硬币的结果

$X=1$ 表示出现正面

$X=0$ 表示出现反面

引进随机变量的目的是为了用微积分的手段研究概率论

2 随机变量的分布函数

定义；设 X 是一个随机变量， x 是一个任意的实数

则函数 $F(x)=P(X \leq x)$ 称为随机变量 X 的分布函数

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

主要性质；

$$(1) x \in (-\infty, +\infty), 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$(2) \uparrow$$

$$(3) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3 离散型随机变量

定义；如果随机变量 X 只能取有限个或可列个数值，则称 X 是离散型随机变量。

如；抛硬币，扔骰子等

对于离散型随机变量最重要的特征是分布列

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

主要性质；

$$(1) p_i \geq 0$$

$$(2) \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

【例 21】设随机变量的分布列是

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.1	a	0.3	0.2

(1) 求 a

(2) 求 $P(0.5 \leq X < 4)$

(3) 求 $F(x)$ 和 $F(3.2)$

名师解析：

$$(1) 0.1 + 0.1 + a + 0.3 + 0.2 = 1 \Rightarrow a = 0.3$$

$$(2) P(0.5 \leq X < 4) = 0.1 + 0.3 + 0.3 = 0.7$$

$$(3) x < 0, F(x) = 0$$

$$0 \leq x < 1, F(x) = 0.1$$

$$1 \leq x < 2, F(x) = 0.2$$

$$2 \leq x < 3, F(x) = 0.5$$

$$3 \leq x < 4, F(x) = 0.8$$

$$4 \leq x, F(x) = 1$$

【例 22】下列是随机变量的分布列的是

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; D \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

名师解答： B

名师解析：根据分布列的性质

二 随机变量的数字特征

1 数学期望

定义：设离散型随机变量 X 的分布列是 $P(X = x_i) = p_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

则称 为随机变量 X 的数学期望，记作 $E(X)$

如：设随机变量 X, Y 分别表示甲，乙两人射击的环数

$$\begin{pmatrix} X & 8 & 9 & 10 \\ p & 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Y & 8 & 9 & 10 \\ p & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 8 \times 0.4 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.5 = 9.1$$

$$E(Y) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.2 = 8.9$$

1 方差

定义：设离散型随机变量 X , $E[X - E(X)]^2$ 存在

则称它为随机变量 X 的方差，记作 $D(X)$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

标准差

如：设随机变量 X, Y 分别表示甲、乙两人射击的环数

$$\begin{pmatrix} X^2 & 64 & 81 & 100 \\ p & 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Y^2 & 64 & 81 & 100 \\ p & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 8 \times 0.4 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.5 = 9.1$$

$$E(Y) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.2 = 8.9$$

$$E(X^2) = 64 \times 0.4 + 81 \times 0.1 + 100 \times 0.5 = 83.7$$

$$E(Y^2) = 64 \times 0.3 + 81 \times 0.5 + 100 \times 0.2 = 79.7$$

$$D(X) = 83.7 - 9.1^2 = 0.89$$

$$D(Y) = 79.7 - 8.9^2 = 0.49$$

【例 23】设随机变量的分布列是

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	a	0.2	0.1	0.3

(1) 求 a , 并求 $p(X < 1)$

(2) 求 $E(X)$

(3) 求 $D(X)$

(4) 求 $F(X)$

名师解析：

$$(1) 0.1 + a + 0.2 + 0.1 + 0.3 = 1 \Rightarrow a = 0.3$$

$$p(x < 1) = 0.1 + 0.3 + 0.2 = 0.6$$

$$(2) E(X) = -2 \times 0.1 + (-1) \times 0.3 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 = 0.2$$

$$(3) D(X) = (-2 - 0.2)^2 \times 0.1 + (-1 - 0.2)^2 \times 0.3 + (0 - 0.2)^2 \times 0.2 + (1 - 0.2)^2 \times 0.1 + (2 - 0.2)^2 \times 0.3 = 1.96$$

$$\begin{bmatrix} X^2 & 0 & 1 & 4 \\ P & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$E(X^2) = 1 \times 0.4 + 4 \times 0.4 = 2$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 0.2^2 = 1.96$$

名师解析：

$$\begin{aligned}
 (4) & x < -2, F(x) = 0 \\
 & -2 \leq x < -1, F(x) = 0.1 \\
 & -1 \leq x < 0, F(x) = 0.4 \\
 & 0 \leq x < 1, F(x) = 0.6 \\
 & 1 \leq x < 2, F(x) = 0.7 \\
 & 2 \leq x, F(x) = 1
 \end{aligned}$$

【例 24】一个盒子中有编号为 1,2,3,4,5 的乒乓球，现从中任选 3 个，用 X 表示取出的 3 个球上的最大号码，求

- (1) X 的分布列
- (2) $E(X)$

名师解析：(1)

$$P(X=3) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10}; P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}$$

X	3	4	5
P	1/10	3/10	6/10

$$(2) E(X) = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{6}{10} = 4.5$$

【例 25】设随机变量 X 的分布函数是，求 X 的分布列

名师解析：

X	1	2	3	4
P	0.2	0.3	0.4	0.1

【例 26】设离散型随机变量 X 的概率分布是

【17 年真题】

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 $E(X)$ 和 $D(X)$

名师解析：

$$E(X) = 0 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} X^2 & 0 & 1 & 4 \\ P & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 0 + 0.4 + 4 \times 0.3 = 1.6$$

$$D(X) = 1.6 - 1^2 = 0.6$$

【例 27】 已知某篮球运动员每次投中的概率是 0.9，记 X 是他两次独立投篮投中的次数

(1) 求 X 的分布列

(2) 求 E(X)

名师解析：(1)

$$P(X=0)=C_2^0(0.9)^0(0.1)^2=0.01$$

$$P(X=1)=C_2^1(0.9)^1(0.1)^1=0.18$$

$$P(X=2)=C_2^2(0.9)^2(0.1)^0=0.81$$

X	0	1	2
P	0.01	0.18	0.81

(2)

$$E(X)=0+1\times 0.18+2\times 0.81=1.8$$

【例 28】 盒子中有 5 个产品，3 个合格品，从盒子中任取 2 个，记 X 为取出的合格品的个数

(1) 求 X 的分布列

(2) 求 E(X)

名师解析：(1)

$$P(X=0)=\frac{1}{C_5^2}=0.1$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=0.6$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$$

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$E(X)=0+1\times 0.6+2\times 0.3=1.2$$

(2)