



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列极限等于1的是

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5}$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

2. 函数 $y = |x| + 1$ 在 $x = 0$ 处

A. 无定义

B. 不连续

C. 连续但是不可导

D. 可导

3. 函数 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 在区间 $(-1, 1)$ 内

A. 单调减少

B. 单调增加

C. 不增不减

D. 有增有减

4. 函数 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x$ 在定义域内的凸区间是A. $(-\infty, 0)$ B. $(-2, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$ 5. 若 $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}$, 则 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx$ 等于

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

6. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ 等于

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

7. 若 $\int_{-\infty}^0 e^{kx} dx = \frac{1}{3}$, 则 k 等于A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$

C. 3

D. -3

8. 设 $z = xe^{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于A. xye^{xy} B. $x^2 e^{xy}$ C. e^{xy} D. $(1 + xy)e^{xy}$ 9. 设函数 $z = \ln xy + e^{x^2 y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} =$ A. $\frac{1}{2} - 2e^2$ B. $\frac{1}{2} + e^2$ C. $1 + 2e^2$ D. $1 + e^2$

10. 把两封信随机地投入标号为1, 2, 3, 4的4个邮筒中, 则1, 2号邮筒各有一封信的概率等于

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} =$

12. $y = \arctan e^x$, 则 $y' \Big|_{x=0} =$

13. 设 $y = y(x)$ 由 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ 确定, 且 $y \Big|_{x=2} = 0$, 则 $y' \Big|_{x=2} =$

14. 曲线 $x^2 + y^2 = 2x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为

15. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的拐点是

16. $\int (\sqrt{x} - 1) \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx =$

17. $\int \sin 2x \cos x dx =$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{10-6x}} dx =$

19. $\int_1^e \ln x dx =$

20. 若 $z = \ln(x + e^y)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

22. (本题满分 8 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

24. (本题满分 8 分)

设 f'' 存在, $z = \frac{1}{x} f(xy) + y f(x + y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

25. (本题满分 8 分)

一个袋子中有 5 个球,编号为 1,2,3,4,5,同时从中任取 3 个,以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码,求随机变量 X 的概率分布.

26. (本题满分 10 分)

求 $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14$ 的极值点和极值,以及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27. (本题满分 10 分)

设 $z = \sin(xy^2) + e^{x^2y}$, 求 dz .

28. (本题满分 10 分)

当 $x > 0$ 时,证明: $e^x > 1 + x$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$ ($\arctan x$ 是有界函数), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ (用无穷小代换: $\arctan x \sim$

$x(x \rightarrow 0)$), $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ($x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而 $\sin x$ 是有界函数, 注

意 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点可导、连续的性质的知识点.

【应试指导】 从四个选项的内容来看, 我们可以一步一步地处理, $x=0$ 时, $y=1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (|x|+1) = 1$, 故 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续. y 在 $x=0$ 的可导性可从左右导数出发进行讨论. $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, 由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 故应选 C.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因为 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, 所以 $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 令 $y' = 0$, 得 $x=0$; 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$; 当 $x <$

0 时, $y' < 0$, 故在 $(-1, 1)$ 内, 函数有增有减.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 48x + 6$, $f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4)$, 令 $f''(x) < 0$, 有 $x^2 - 4 < 0$, 于是 $-2 < x < 2$, 即凸区间为 $(-2, 2)$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^4 f(\sqrt{x}) \cdot 2d(\sqrt{x}) = 2 \times \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 = 16.$$

解法 2:

$$\text{因 } \int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}, \text{ 于是 } f(x) = 2x^3, \text{ 从而 } \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \int_0^4 x dx = x^2 \Big|_0^4 = 16.$$

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 解法 1:

$$\text{因 } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \text{ 为奇函数, 故由积分性质知, } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = 0.$$

解法 2:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} d(1 + \cos x) = - \ln(1 + \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int_{-\infty}^0 e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} \Big|_{-\infty}^0 = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0, \\ \infty, & k \leq 0, \end{cases}$ 故 $k > 0$, 由题意知 $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$, 从而 $k = 3$.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = xe^{xy}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = (1 + xy)e^{xy}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x + e^{xy} \cdot x^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2$.

注也可先将 $x=1$ 代入, 则 $z \Big|_{(1,y)} = \ln y + e^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} + e^y$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了古典概率的知识点.

【应试指导】 因两封信投向四个邮筒共有的投法(可重复排列)为 $n = 4^2 = 16$; 满足 1, 2 号邮筒各有一封信的

投法为 $k = A_2^2 = 2$, 故所求概率为 $P = \frac{k}{n} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

二、填空题

11.【答案】 e^{-6}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{x}{2} \cdot (-6)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{x}{2}}^{-6} = e^{-6}$.

12.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y' = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x$, 令 $x=0$, 则 $y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

13.【答案】 $-\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ 两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数), 因 $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2$, 故 $y' =$

$$\frac{2 - 2x - 2y}{2x - 2y} = \frac{1 - x - y}{x - y}. \text{ 令 } x=2, \text{ 且 } y \Big|_{x=2} = 0, \text{ 则 } y' \Big|_{x=2} = -\frac{1}{2}.$$

14.【答案】 $y=1$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $x^2 + y^2 = 2x$, 两边对 x 求导得 $2x + 2yy' = 2$, 取 $x=1, y=1$, 则 $y' \Big|_{x=1} = 0$, 所以切线方程为 $y=1$.

15.【答案】 $(1, 1)$

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 0$, 得 $x=1$. 则当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$. 又因 $x=1$ 时 $y=1$, 故点 $(1, 1)$ 是拐点(因 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有二阶导数, 故没有其他形式的拐点).

16.【答案】 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + 2x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C.$

17.【答案】 $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin 2x \cos x dx = \int 2 \sin x \cos^2 x dx = -\int 2 \cos^2 x d \cos x = -2 \times \frac{1}{3} \cos^3 x + C = -\frac{2}{3} \cos^3 x + C.$

18.【答案】 $\frac{2}{27}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{10-6x}} dx = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{-6x}{\sqrt{10-6x}} dx = -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \frac{-6x+10-10}{\sqrt{10-6x}} dx = -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \sqrt{10-6x} dx +$

$\frac{10}{6} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{10-6x}} = -\frac{1}{6} \int_{-1}^1 \left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{\frac{1}{2}}\right] d(10-6x) + \frac{10}{6} \int_{-1}^1 \left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{-\frac{1}{2}}\right] d(10-6x) = \frac{1}{36} \times$

$\frac{2}{3}(10-6x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 - \frac{10}{36} \times 2(10-6x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{54} \times (8-64) - \frac{5}{9} \times (2-4) = \frac{2}{27}.$

注:本题可另解如下:令 $\sqrt{10-6x} = t$, 则 $x = \frac{1}{6}(10-t^2)$.

所以 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{10-6x}} dx = \int_4^2 \frac{\frac{1}{6}(10-t^2)}{t} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2t) dt = \frac{1}{18} \int_2^4 (10-t^2) dt = \frac{1}{18} \left(10t - \frac{1}{3}t^3\right) \Big|_2^4 = \frac{1}{18} \times$

$\left(40 - \frac{64}{3} - 20 + \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{27}.$

19.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - (e-1) = 1.$

20.【答案】 $-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln(x+e^y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+e^y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{-e^y}{(x+e^y)^2}.$

三、解答题

21. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$= 2.$

注:本题也可用洛必达法则求解.

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sqrt{1-x^2} = 2,$

本题还可利用变量代换求解如下:令 $\sqrt{1-x^2} = t$,

原式 $= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^2}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} (1+t) = 2.$

22. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$

23. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a xe^{-x} dx = -\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x de^{-x}$

$= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-ae^{-x}) \Big|_0^a + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx$

$= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-ae^{-a}) + \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^a$

$= \lim_{a \rightarrow +\infty} (1 - e^{-a}) = 1.$

24. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) \cdot y + y f'(x+y),$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} [f''(xy) + y f''(xy) \cdot x] + f''(x+y) + y f''(x+y)$

$= y f''(xy) + f''(x+y) + y f''(x+y).$

25. 依题意, 随机变量 X 只能取值 3, 4, 5; 且 $P\{X=3\} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10};$

$P\{X=4\} = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}; P\{X=5\} = \frac{C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10}.$

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

26. $y' = 6x^2 - 6x - 12, y'' = 12x - 6,$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 2,$

当 $x_2 = 2$ 时, $y'' = 18 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取极小值 -6 .

当 $x_1 = -1$ 时, $y'' < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值 21.

又令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 从而曲线为凸的, 即函数曲线的凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$; $x > \frac{1}{2}$ 时,

$y'' > 0$, 从而曲线为凹的, 即函数曲线的凹区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$; 又因 $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$, 故曲线的拐点为 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$.

27. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy^2) \cdot y^2 + e^{x^2 y} \cdot 2xy,$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy^2) \cdot 2xy + e^{x^2 y} \cdot x^2,$

所以 $dz = [y^2 \cos(xy^2) + 2xye^{x^2 y}]dx + [2xycos(xy^2) + x^2 e^{x^2 y}]dy.$

28. 证法 1: 在 $[0, x]$ 上令 $F(x) = e^x$, 则使用拉格朗日定理得,

$F(x) - F(0) = F'(\xi)(x-0), \xi \in (0, x),$ 即 $e^x - 1 = e^\xi \cdot x,$

由于 $e^\xi > 1$, 所以 $e^x - 1 > x$, 即 $e^x > 1+x$.

证法 2: 令 $G(x) = e^x - 1 - x$, 则 $G'(x) = e^x - 1$, 故在 $[0, x]$ 内 $G'(x) > 0$,

所以在 $[0, x]$ 上 $G(x)$ 单调递增, 由 $G(0) = 0$, 得 $x > 0$ 时, $G(x) > 0$,

即 $e^x - 1 - x > 0$, 亦即 $e^x > 1+x$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量是无穷小量的是

A. $\frac{\sin x}{x}$

B. $\ln |x|$

C. $\frac{x}{1+x}$

D. $\cot x$

2. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 上切线平行于 x 轴的点是

A. $(0, 0)$

B. $(1, 2)$

C. $(-1, 2)$

D. $(-1, -2)$

3. 若 $f(u)$ 可导,且 $y = f(e^x)$,则 $dy =$

A. $f'(e^x)dx$

B. $f'(e^x)e^x dx$

C. $f(e^x)e^x dx$

D. $f'(e^x)$

4. 已知函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$,则 $f'(x_0)$ 等于

A. -4

B. -2

C. 2

D. 4

5. 如果在区间 (a, b) 内,函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$,则函数在此区间是

A. 单调递增且曲线为凹的

B. 单调递减且曲线为凸的

C. 单调递增且曲线为凸的

D. 单调递减且曲线为凹的

6. 曲线 $y = (x-1)^3 - 1$ 的拐点是

A. $(2, 0)$

B. $(1, -1)$

C. $(0, -2)$

D. 不存在

7. 若 $\int f(x)dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$,则 $f(x)$ 等于

A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B. $\frac{1}{1+x^2}$

C. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

8. 下列反常积分收敛的是

A. $\int_1^{+\infty} \cos x dx$

B. $\int_1^{+\infty} e^x dx$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

D. $\int_1^{+\infty} \ln x dx$

9. 设 $z = x^y$,则 $dz =$

A. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$

B. $x^{y-1}dx + ydy$

C. $x^y(dx + dy)$

D. $x^y(xdx + ydy)$

10. 某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8,超过60年的概率为0.6,该建筑物经历了50年后,它将在10年内倒塌的概率等于

A. 0.25

B. 0.30

C. 0.35

D. 0.40

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3} =$

12. 当 $f(0) =$ 时, $f(x) = \ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.13. 若 $f'(x_0) = 1, f(x_0) = 0$,则 $\lim_{h \rightarrow \infty} hf\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) =$ 14. 设 $y = x^2 \cos x + 2^x + e$,则 $y' =$

15. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} dx =$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x} =$

17. 设 $f(x) = e^{-x}$,则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ 18. 设 $z = \cos(xy^2)$,则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 19. 设 $z = \frac{(x-2y)^2}{2x+y}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 20. 设 $z = e^{xe^y}$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$.

22. (本题满分 8 分)

试确定 a, b 的值,使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin ax + 1, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \text{在点 } x = 0 \text{ 处连续.} \\ x \sin \frac{1}{x} + b, & x > 0 \end{cases}$

23. (本题满分 8 分)

设 $y = \ln \cos x$, 求 $y''(0)$.

24. (本题满分 8 分)

求 $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

从一批有 10 件正品及 2 件次品的产品中,不放回地一件一件地抽取产品. 设每个产品被抽到的可能性相同. 求直到取出正品为止所需抽取的次数 X 的概率分布.

26. (本题满分 10 分)

确定函数 $y = 2x^4 - 12x^2$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^2$ 与该曲线在 $x = a(a > 0)$ 处的切线与 x 轴所围的平面图形的面积.

28. (本题满分 10 分)

求由方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 确定的隐函数的全微分.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 经实际计算及无穷小量定义知应选 C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty$.

注先观察四个选项,从已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,先把 A 排除,再利用 $\ln x$ 的性质可把 B 排除,C 自然可验证是正确的,由 $\cot x$ 的性质,可排除 D 项.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 由 $y = x^3 - 3x$ 得 $y' = 3x^2 - 3$,令 $y' = 0$,得 $x = \pm 1$.经计算 $x = -1$ 时, $y = 2$; $x = 1$ 时, $y = -2$,故选 C.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y = f(e^x)$,所以, $y' = f'(e^x)e^x dx$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h}} = \frac{1}{-2f'(x_0)} = \frac{1}{4}$,于是 $f'(x_0) = -2$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识点.

【应试指导】 因 $f'(x) > 0$,故函数单调递增,又 $f''(x) < 0$,所以函数曲线为凸的.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 因 $y = (x-1)^3 - 1, y' = 3(x-1)^2, y'' = 6(x-1)$.令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$,当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$;当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$.又因 $y \Big|_{x=1} = -1$,于是曲线有拐点 $(1, -1)$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$,所以 $f(x) = [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_1^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 1)$ 不存在,此积分发散;对于选项 B:

$\int_1^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e)$ 不存在,此积分发散;对于选项 C: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$,此积分收敛;

对于选项 D: $\int_1^{+\infty} \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(x \ln x) - x \Big|_1^b \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b \ln b - b + 1)$ 不存在,此积分发散.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$,所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$,故选 A.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A = \{\text{该建筑物使用寿命超过 50 年}\}, B = \{\text{该建筑物使用寿命超过 60 年}\}$,由题意, $P(A) = 0.8, P(B) = 0.6$,所求概率为: $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(B)}{P(A)} = 1 - \frac{0.6}{0.8} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$.

二、填空题

11.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} = 0$.

12.【答案】 mk

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{m}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+kx)^{\frac{1}{\frac{x}{k}}} = \ln e^{km} = km$,所以当 $f(0) = km$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

13.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{h \rightarrow \infty} hf\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) = -\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f\left(x_0 - \frac{1}{h}\right) - f(x_0)}{-\frac{1}{h}} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = -f'(x_0) = -1$.

注:注意导数定义的结构特点.

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

14.【答案】 $2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x, (2^x)' = 2^x \cdot \ln 2, e' = 0$,所以 $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x + 2^x \ln 2$.

15.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 因函数 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上是奇函数,因此 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} dx = 0$.

注:奇偶函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一,应注意.

16.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1} = 1$.

17.【答案】 $\frac{1}{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int f'(\ln x) d\ln x \xrightarrow{u=\ln x} \int f'(u) du = f(u) + C = e^{-u} + C = e^{-\ln x} + C = \frac{1}{x} + C.$

本题也可另解如下:

由 $f(x) = e^{-x}$ 得 $f'(x) = -e^{-x}$, 所以 $f'(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$, 故 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C.$

18. 【答案】 $-2xy \sin(xy^2)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \cos(xy^2)$, 故 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(xy^2) \cdot (xy^2)' = -2xy \sin(xy^2).$

19. 【答案】 $\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = \frac{(x-2y)^2}{2x+y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x-2y) \cdot (2x+y) - 2(x-2y)^2}{(2x+y)^2} = \frac{2(x-2y)(2x+y-x+2y)}{(2x+y)^2} = \frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}.$

20. 【答案】 $(1+xe^y)e^{y+xe^y}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = e^{xe^y}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xe^y} \cdot e^y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xe^y} \cdot xe^y \cdot e^y + e^{xe^y} \cdot e^y = (1+xe^y)e^{y+xe^y}.$

三、解答题

21. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $= 1.$

注:将分母 $\sin^2 x$ 用与之等价的无穷小量 x^2 代换,这是一个技巧.

22. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \sin ax + 1 \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(a \cdot \frac{\sin ax}{ax} + 1 \right) = a + 1,$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \sin \frac{1}{x} + b) = b,$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0),$

即 $a+1=b=2$, 即 $a=1, b=2.$

23. $y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x, y'' = -\sec^2 x$, 所以 $y''(0) = -1.$

24. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx$
 $= \int (\sin x + \cos x) dx$
 $= -\cos x + \sin x + C.$

25. 由题意, X 的所有可能的取值为 $1, 2, 3,$

$X=1$, 即第一次就取到正品, $P\{X=1\} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$

$X=2$, 即第一次取到次品且第二次取到正品, $P\{X=2\} = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{33};$

同理, $P\{X=3\} = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{66},$

故 X 的概率分布如下

X	1	2	3
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

26. $y' = 8x^3 - 24x, y'' = 24x^2 - 24$, 令 $y' = 0$, 得 $x = \pm\sqrt{3}$ 或 $x=0.$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm 1; x < -\sqrt{3}$ 时, $y' < 0; -\sqrt{3} < x < 0$ 时, $y' > 0;$

$0 < x < \sqrt{3}$ 时, $y' < 0; x > \sqrt{3}$ 时, $y' > 0.$

于是, 函数的递增区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$; 递减区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$; 有极小值 $f(\pm\sqrt{3}) = -18,$ 有极大值 $f(0) = 0.$

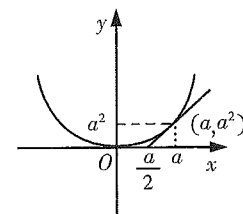
又因当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 则 y 为凸函数;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数.

综上得函数 y 的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-1, 1)$, 且拐点为 $(-1, -10)$ 和 $(1, -10).$

27. 如图所示, 在 $x=a$ 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=a} = 2a$, 切线方程为 $y-a^2 = 2a(x-a),$



即 $y = 2ax - a^2,$

$S = \int_0^{a^2} \left(\frac{y+a^2}{2a} - \sqrt{y} \right) dy$
 $= \frac{1}{2a} \left(\frac{y^2}{2} + a^2 y \right) \Big|_0^{a^2} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} = \frac{1}{12} a^3.$

28. 等式两边对 x 求导, 将 y 看做常数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x+2y-2}{4-2z} = \frac{2x+y-1}{2-z},$

同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+2x-2}{4-2z} = \frac{x+y-1}{2-z},$

所以 $dz = \frac{1}{2-z} [(2x+y-1)dx + (y+x-1)dy].$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时,无穷小量 $x + \sin x$ 是比 x 的 【 】

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 同阶但非等价无穷小 D. 等价无穷小

2. 下列极限计算正确的是 【 】

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

3. 设 $f'(1) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ 等于 【 】

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

4. 设 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于 【 】

- A. $x + \frac{1}{2}x^2$ B. $x - \frac{1}{2}x^2$ C. $\sin^2 x$ D. $\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$

5. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int \cos x f(\sin x) dx =$ 【 】

- A. $F(\cos x) + C$ B. $F(\sin x) + C$ C. $-F(\cos x) + C$ D. $-F(\sin x) + C$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a \neq -b$, 则下列各式不成立的是 【 】

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
C. $\int_a^b f(x) dx = 0$ D. 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 必有 $f(x) = 0$

7. 下列反常积分发散的是 【 】

- A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx$ C. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ D. $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$

8. 设 $z = \ln \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【 】

- A. $\frac{x}{y}$ B. $\frac{1}{x}$ C. $-\frac{1}{x}$ D. $-\frac{y}{x^2}$

9. 设 $z = x^3 e^{y^2}$, 则 dz 等于 【 】

- A. $6x^2 y e^{y^2} dx dy$ B. $x^2 e^{y^2} (3dx + 2xy dy)$
C. $3x^2 e^{y^2} dx$ D. $x^3 e^{y^2} dy$

10. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 是甲射中的概率为 【 】

- A. 0.6 B. 0.75 C. 0.85 D. 0.9

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\sin \frac{4}{x}} =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. $y = \cos e^{\frac{1}{x}}$, 则 $dy =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} =$ _____.

15. 设 $z = e^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

16. 设 $y = e^{2 \arccos x}$, 则 $y' \Big|_{x=0} =$ _____.

17. $\int_0^2 |x - 1| dx =$ _____.

18. $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx =$ _____.

19. $\int \sec^2 5x dx =$ _____.

20. 设 $f(x)$ 是 $[-2, 2]$ 上的偶函数, 且 $f'(-1) = 3$, 则 $f'(1) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 5, \text{ 求 } a, b.$$

22. (本题满分 8 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + x)}.$$

23. (本题满分 8 分)

$$\text{设 } y = \sin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ 求 } y'.$$

24. (本题满分 8 分)

$$\text{计算 } \int \frac{x + \arctan x}{1 + x^2} dx.$$

25. (本题满分 8 分)

$$\text{已知 } \int_1^{x+1} f(t) dt = xe^{x+1}, \text{ 求 } f'(x).$$

26. (本题满分 10 分)

求函数 $y = 2x^3 - 3x^2$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间、拐点和渐近线.

27. (本题满分 10 分)

一批零件中有 10 个合格品, 3 个次品, 安装机器时, 从这批零件中任取一个, 取到合格品才能安装. 若取出的是次品, 则不再放回, 求在取得合格品前已取出的次品数 X 的概率分布.

28. (本题满分 10 分)

$$\text{计算 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \left(\int_t^1 e^{-u^2} du \right) dt}{(x-1)^2}.$$

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 2$, 所以 $x \rightarrow 0$ 时, $x + \sin x$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

2.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$, 错误; 对于选项 B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 正确; 对于选项 C:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = \infty \neq 1$, 错误; 对于选项 D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \neq 1$, 错误.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $f'(1) = 1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2}$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 于是 $f'(x) = 1 - x$, 两边积分得 $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2 + C$, 又

$f(0) = 0$, 故 $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int \cos x f(\sin x) dx = \int f(\sin x) d\sin x \xrightarrow{u = \sin x} \int f(u) du = F(u) + C = F(\sin x) + C$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】 由题意知, C 项不成立, 其余各项均成立.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷区间反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}$, 此积分收敛; 对于选项 B: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$,

此积分收敛; 对于选项 C: $\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 = 1$, 此积分收敛; 对于选项 D: $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^0 = -1 +$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$, 该极限不存在, 故此积分发散.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln \frac{y}{x}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z = x^3 e^{y^2}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y e^{y^2}$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 e^{y^2} dx + 2x^3 y e^{y^2} dy = x^2 e^{y^2} (3dx + 2xy dy)$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_1 = \{\text{甲射中目标}\}$, $A_2 = \{\text{乙射中目标}\}$, $B = \{\text{目标被命中}\}$. 由题意, $P(A_1) = 0.6$, $P(A_2) = 0.5$, $B = A_1 \cup A_2$, $P(B) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.5) = 0.8$; 故所求

概率为 $P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\sin \frac{4}{x}} \xrightarrow{u = \frac{1}{x}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 2u}{\sin 4u} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

12.【答案】 6

【考情点拨】 本题考查了函数在一点外连续的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + x^2}{6} = \frac{a}{6}$, 又因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则应有 $1 = \frac{a}{6}$,

故 $a = 6$.

13.【答案】 $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sin e^{\frac{1}{x}} dx$.

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 由 $y = \cos e^{\frac{1}{x}}$, 所以 $dy = -\sin e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin e^{\frac{1}{x}} dx$.

14.【答案】 e^6

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 6} = e^6$.

15.【答案】 $-\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y}\right)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z = e^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$, 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^3}\right) =$

$-\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

16.【答案】 $-2e^{\pi}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y' = e^{2 \arccos x} \cdot 2 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, 故 $y' \Big|_{x=0} = -2e^{\pi}$.

17.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = 1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 - 1 = 1.$

注绝对值函数的积分必须分段进行.

18.【答案】 $x - \arctan x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C.$

19.【答案】 $\frac{1}{5} \tan 5x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int \sec^2 5x dx = \frac{1}{5} \int \sec^2 5x d5x \stackrel{u=5x}{=} \frac{1}{5} \int \sec^2 u du = \frac{1}{5} \tan u + C = \frac{1}{5} \tan 5x + C.$

20.【答案】 -3

【考情点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)$ 是偶函数,故 $f'(x)$ 是奇函数,所以 $f'(-1) = -f'(1)$,即 $f'(1) = -f'(-1) = -3.$

三、解答题

21. 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 5$, 且当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1 \rightarrow 0$, 故必须有

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0, \text{ 即 } a + b + 1 = 0.$$

将 $b = -a-1$ 代入, 有

$$5 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = a + 2,$$

所以 $a = 3, b = -4.$

22. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{1} = 2.$

23. $y' = \cos \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$

$$= \cos \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \cos \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

24. 由 $\frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \arctan x d\arctan x$, 则

$$\int \frac{x + \arctan x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \int \arctan x d\arctan x$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$$

25. 等式两边对 x 求导, 有

$$f(x+1) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1+x)e^{x+1},$$

所以 $f(x) = xe^x$, 因此 $f'(x) = e^x + xe^x.$

26. 令 $y' = 6x^2 - 6x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$,

$$y'' = 12x - 6 = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-		-	0	+		+
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

所以函数 y 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, 1)$;

函数 y 的凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$, 凹区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

故 $x = 0$ 时, 函数有极大值 0, $x = 1$ 时, 函数有极小值 -1 , 且点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 为拐点, 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2)$ 不存在, 且 $y = 2x^3 - 3x^2$ 没有无意义的点, 故函数没有渐近线.

27. 由题意, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3. $X = 0$, 即第一次就取到合格品, 没有取到次品, $P\{X = 0\} = \frac{10}{13}$; $X = 1$, 即第一

次取到次品, 第二次取到合格品, $P\{X = 1\} = \frac{3}{13} \times \frac{10}{12} = \frac{5}{26}$; 同理, $P\{X = 2\} = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{143}$;

$$P\{X = 3\} = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{286}.$$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

28. 由洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \left(\int_t^1 e^{-u^2} du \right) dt}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_x^1 e^{-u^2} du}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{-x^2}}{2} = -\frac{1}{2e}.$$

注: 要使用洛必达法则必须检验定理的条件是否满足, 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \int_1^x \left(\int_t^1 e^{-u^2} du \right) dt = 0$, 因此可使用洛必达法则.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是

A. $\frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$

B. $2^{-x} - 2 (x \rightarrow 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} (x \rightarrow +\infty)$

D. $x \cdot \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 的连续区间是

A. $[0, 1) \cup (1, 3]$

B. $[1, 3]$

C. $[0, 1)$

D. $[0, 3]$

3. 函数 $y = ax^2 + c$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加,则 a, c 应满足

A. $a < 0$ 且 $c = 0$

B. $a > 0$ 且 c 是任意常数

C. $a < 0$ 且 $c \neq 0$

D. $a < 0$ 且 c 是任意常数

4. 曲线 $y = x^4 - 3$ 在点 $(1, -2)$ 处的切线方程为

A. $2x - y - 6 = 0$

B. $4x - y - 6 = 0$

C. $4x - y - 2 = 0$

D. $2x - y - 4 = 0$

5. 不定积分 $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) d\sin x$ 等于

A. $-\frac{1}{\sin x} + \sin x + C$

B. $\frac{1}{\sin x} + \sin x + C$

C. $-\cot x + \sin x + C$

D. $\cot x + \sin x + C$

6. 设 $z = (3x^2 + y^2)^{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于

A. $xy \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1}$

B. $(3x^2 + y^2)^{xy} \cdot \ln(3x^2 + y^2)$

C. $y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy} [(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) + 6x^2]$

D. $y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} [(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) + 6x^2]$

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 等于

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

8. 对于函数 $z = xy$, 原点 $(0, 0)$

A. 不是函数的驻点

B. 是驻点不是极值点

C. 是驻点也是极值点

D. 无法判定是否为极值点

9. 曲线 $y = e^x$ 和直线 $y = 1, x = 1$ 围成的图形面积等于

A. $2 - e$

B. $e - 2$

C. $e - 1$

D. $e + 1$

10. 有两箱同种零件,第一箱内装50件,其中一等品10件;第二箱内装30件,其中一等品18件;现随机地从两箱中挑出一箱,再从这箱中随机地取出一件零件,则取出的零件是一等品的概率为

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x + 2} =$

12. 设 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, 则 $f'(0) =$

13. 设 $y = e^x \cos x$, 则 $y'' =$

14. $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx =$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}} =$

16. 若由 $e^y = xy$ 确定 y 是 x 的函数, 则 $y' =$

17. $\int x \sqrt{1-x^2} dx =$

18. $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx =$

19. 设 $z = u^2 \ln v, u = \frac{y}{x}, v = e^{x^3 y}$, 则 $dz =$

20. 设 $z = \sqrt{x(x+y^2)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设 $y = 2x^3 \arccos x + (x^2 - 2) \sqrt{1 - x^2}$, 求 dy .

22. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt}{x^2}$.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 e^x dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 有二阶导数, 计算 $\frac{\partial^2 f(e^{xy})}{\partial x^2}$.

26. (本题满分 10 分)

已知曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 $(1, 2)$ 处有水平切线, 且原点为该曲线的拐点, 求 a, b, c 的值, 并写出此曲线的方程.

27. (本题满分 10 分)

袋中有 4 个白球, 2 个红球, 从中任取 3 个球, 用 X 表示所取 3 个球中红球的个数, 求 X 的概率分布.

28. (本题满分 10 分)

设连续函数 $f(x) = \ln x - \int_1^e f(x) dx$, 证明: $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e}$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (2^{-x} - 2) = -1$,故由无穷小量知应选 D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 因 $x = 1$ 处 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续,因此 $f(x)$ 的连续区间为 $[0, 1) \cup (1, 3]$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调增加性的知识点.

【应试指导】 由 $y' = 2ax$,若 y 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加,则应有 $y' > 0$,即 $a > 0$,且对 c 没有其他要求,故选 B.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 因 $y = x^4 - 3$,所以 $y' = 4x^3$,于是曲线在点 $(1, -2)$ 处的切线的斜率 $k = y' \Big|_{x=1} = 4$,从而得切

线方程: $y + 2 = 4(x - 1)$,即 $4x - y - 6 = 0$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) d\sin x = -\frac{1}{\sin x} + \sin x + C$,故选 A.

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = (3x^2 + y^2)^{xy}$ 可看作是 $z = u^v, u = 3x^2 + y^2, v = xy$ 复合而成, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \cdot u^{v-1} \cdot 6x + u^v \cdot \ln u \cdot y = xy \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} \cdot 6x + (3x^2 + y^2)^{xy} \cdot \ln(3x^2 + y^2) \cdot y = y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} \cdot [(3x^2 + y^2)\ln(3x^2 + y^2) + 6x^2]$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的驻点、极值点的知识点.

【应试指导】 因 $z = xy$,于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x$;令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$,且 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,得驻点 $(0, 0)$;又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,从而 $B^2 - AC = 1 > 0$,故点 $(0, 0)$ 不是极值点.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】 由题意知,所求面积 $A = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了全概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_i = \{\text{挑出的是第 } i \text{ 箱}\}, i = 1, 2; B = \{\text{取出的是等品}\}$.由题意知, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$,

$P(B | A_1) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, P(B | A_2) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.由全概率公式知, $P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) +$

$P(A_2)P(B | A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}$.

12.【答案】 5

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$,则 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$,故 $f'(0) = 5$.

13.【答案】 $-2e^x \sin x$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y = e^x \cos x$,则 $y' = e^x \cos x - e^x \sin x, y'' = e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \sin x - e^x \cos x = -2e^x \sin x$.

14.【答案】 $-\sin \frac{1}{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -\int \cos \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = u}{=} -\sin u + C = -\sin \frac{1}{x} + C$.

15.【答案】 e^{-2}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{-\frac{1}{x} \cdot (-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - x)^{-\frac{1}{x}}]^{-2} = e^{-2}$.

16.【答案】 $\frac{y}{e^y - x}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 在 $e^y = xy$ 两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数),有 $e^y \cdot y' = y + xy'$,所以 $y' = \frac{y}{e^y - x}$.

17.【答案】 $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int x \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int -(\sqrt{1 - x^2}) d(1 - x^2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} +$

$C = -\frac{1}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

18.【答案】 $-\frac{1}{2} \ln 3$

【考情点拨】 本题考查了简单有理函数的积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \int_0^2 \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \Big|_0^2$
 $= -\frac{1}{2} \ln 3.$

19. 【答案】 $y^3 dx + 3xy^2 dy$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z = u^2 \ln v, u = \frac{y}{x}, v = e^{x^3 y}$, 所以 $z = \frac{y^2}{x^2} \cdot x^3 y = xy^3$, 于是 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y^3 dx + 3xy^2 dy$.

20. 【答案】 $\frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}} \cdot x \cdot 2y = \frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}.$

三、解答题

21. $dy = \left[6x^2 \arccos x + 2x^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2x\sqrt{1-x^2} + (x^2-2) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right] dx$
 $= \left[6x^2 \arccos x - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\sqrt{1-x^2} - \frac{x(x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$
 $= \left(6x^2 \arccos x - \frac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

23. $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$
 $= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$
 $= x^2 e^x - 2 \int x de^x$
 $= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

24. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (被积函数为偶函数)
 $= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$
 $= -2 \left(\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} d\arcsin x$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$

25. $\frac{\partial f(e^{xy})}{\partial x} = f'(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y,$

$\frac{\partial^2 f(e^{xy})}{\partial x^2} = [f''(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y] \cdot e^{xy} y + y f'(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y$
 $= y^2 e^{xy} [f''(e^{xy}) e^{xy} + f'(e^{xy})].$

26. $y = ax^3 + bx^2 + cx, y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b,$

由已知条件得

$2 = a + b + c,$ (曲线过(1,2)点)

$3a + 2b + c = 0,$ (在(1,2)点 $y' = 0$)

$2b = 0,$ (原点为拐点)

故 $b = 0, a = -1, c = 3$, 此曲线的方程为 $y = -x^3 + 3x.$

27. 依题意, X 的可能取值为 0, 1, 2.

$P\{X=0\} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = 0.2; P\{X=1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = 0.6;$

$P\{X=2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} = 0.2,$

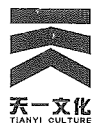
所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

28. 设 $\int_1^e f(x) dx = c$, 则 $f(x) = \ln x - c$,

故 $c = \int_1^e (\ln x - c) dx = \int_1^e \ln x dx - c(e-1)$
 $= (x \cdot \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx - c(e-1)$
 $= e - (e-1) - c(e-1)$
 $= 1 - c(e-1),$

所以 $c = \frac{1}{e}$, 故 $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e}.$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 3

2. 函数 $y = x + \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内

- A. 单调增加 B. 单调减少 C. 不单调 D. 不连续

3. 设 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x) \cos x dx =$

- A. 1 B. -1 C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. $-\frac{\pi^2}{4}$

4. 设在 (a, b) 内有 $\int f'(x) dx = \int g'(x) dx$, 则在 (a, b) 内必定有

- A. $f(x) - g(x) = 0$ B. $f(x) - g(x) = C$
C. $df(x) \neq dg(x)$ D. $f(x) dx = g(x) dx$

5. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 1$, 则 $f'(x_0) =$

- A. 1 B. 0 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt =$

- A. $2x \cos x^4$ B. $x^2 \cos x^4$
C. $2x \sin x^4$ D. $x^2 \sin x^4$

7. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 是 $1 - \sqrt{x}$ 的

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 等价无穷小 D. 不可比较

8. 曲线 $ye^x + \ln y = 1$, 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为

- A. $y - 1 = -\frac{x}{2}$ B. $y = -\frac{1}{2}(x - 1)$
C. $y - 1 = -\frac{x}{3}$ D. $y - 1 = -\frac{x}{4}$

9. 曲线 $y = 3x^2 - x^3$ 的凸区间为

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

10. 事件 A, B 满足 $AB = A$, 则 A 与 B 的关系为

- A. $A = B$ B. $A \subset B$ C. $A \supset B$ D. $A = \bar{B}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} =$

12. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \sqrt{t}}{\sqrt{t} - 1} =$

13. $y = \frac{1}{1 + \tan x}$, 则 $y' =$

14. 设 $y = \sin x$, 则 $y^{(10)} =$

15. $y = y(x)$ 由方程 $xy = e^{y-x}$ 确定, 则 $dy =$

16. 已知 $\int k \tan 2x dx = \frac{2}{3} \ln |\cos 2x| + C$, 则 $k =$

17. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx =$

18. 设 $z = \arctan \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

19. 设 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$

20. $\int_e^{e^2} \ln x dx =$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设 $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$, 求 dy .

22. (本题满分 8 分)

设 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 均为 $y = a \ln x + bx^2 + 3x$ 的极值点, 求 a, b .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$.

24. (本题满分 8 分)

设 $z = \ln(x^2 - y^2)$, 其中 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

25. (本题满分 8 分)

某运动员投篮命中率为 0.3, 求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

26. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

27. (本题满分 10 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t \sin t dt}{x^6}$.

28. (本题满分 10 分)

试用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识.

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既左连续又右连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 = f(0) = a, \text{ 故 } a = 2.$$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识.

【应试指导】 由 $y = x + \cos x$, 所以 $y' = 1 - \sin x \geq 0 (0 < x < 2\pi)$, 故 y 在 $(0, 2\pi)$ 内单调增加.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法.

【应试指导】 由 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 知 $\int f(-\sin x) \cos x dx = \int f(-\sin x) d\sin x = - \int f(-\sin x) d(-\sin x) = -(-\sin x)^2 + C = -\sin^2 x + C$, 所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x) \cos x dx = -\sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识.

【应试指导】 由 $\int f'(x) dx = \int g'(x) dx$, 得 $\int [f'(x) - g'(x)] dx = 0$, 即 $f'(x) - g'(x) = 0$, 又 $\int [f'(x) - g'(x)] dx = \int 0 dx = 0$, 故 $f(x) - g(x) - C = 0$, 所以 $f(x) - g(x) = C$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的定义的知识.

【应试指导】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = 1$ 与 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 相比较, 可得 $f'(x_0) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{2}.$$

注令 $2h = t$, 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{\frac{1}{2}t} = 1$, 也可得出 $f'(x_0) =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{2}.$$

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了变上限积分求导的知识.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t dt = \sin(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \sin x^4$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量阶的比較的知识.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线上一點处的切线方程的知识.

【应试指导】 由 $ye^x + \ln y = 1$, 两边对 x 求导得 $y'e^x + ye^x + \frac{1}{y} \cdot y' = 0$, 即 $y' = \frac{-ye^x}{e^x + \frac{1}{y}}$, 所以 $y' \Big|_{(0,1)} = -\frac{1}{2}$,

故切线方程为 $y-1 = -\frac{x}{2}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的凸区间的知识.

【应试指导】 $y = 3x^2 - x^3, y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$, 显然当 $x > 1$ 时, $y'' < 0$; 而当 $x < 1$ 时, $y'' > 0$. 故在 $(1, +\infty)$ 内曲线为凸弧.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了事件的关系的知识.

【应试指导】 $AB = A$, 则 $A \subset AB (AB \subset A, \text{按积的定义是当然的})$, 即当 $\omega \in A$ 时, 必有 $\omega \in AB$, 因而 $\omega \in B$, 故 $A \subset B$.

二、填空题

11.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$.

本题还可如下解出:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) = e^2.$$

12.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了极限的知识.

【应试指导】 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1} = 1$.

注本题也可用洛必达法则计算.

13.【答案】 $-\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识.

【应试指导】 $y = \frac{1}{1+\tan x}$, 则 $y' = \frac{-\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = \frac{-\sec^2 x}{\frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$.

14.【答案】 $-\sin x$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识.

【应试指导】 由 $y = \sin x$, 且 $y^{(n)} = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$, 则 $y^{(10)} = \sin\left(10 \times \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(5\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$.

15.【答案】 $\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x} dx$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的微分的知识.

【应试指导】 方程 $xy = e^{y-x}$ 两边对 x 求导, y 为 x 的函数, 有 $y + xy' = e^{y-x} \cdot (y' - 1)$ 解得 $dy = \frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x} dx$.

16.【答案】 $-\frac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识.

【应试指导】 $\int k \tan 2x dx = k \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \frac{k}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} d(2x) = \frac{-k}{2} \int \frac{d \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{-k}{2} \cdot \ln |\cos 2x| + C$, 与

$$\frac{2}{3} \ln |\cos 2x| + C \text{ 比较, 得 } k = -\frac{4}{3}.$$

17.【答案】 $\frac{1}{8}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} \right]_2^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{8}.$

18.【答案】 $-\frac{1}{2(x+y)} \sqrt{\frac{y}{x}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{2(x+y)} \sqrt{\frac{y}{x}}.$

19.【答案】 $-e^{\sin x} \cos x \sin y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\sin x} \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{\sin x} \cos x \sin y.$

20.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_e^{e^2} \ln x dx = x \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = 2e^2 - e - x \Big|_e^{e^2} = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$

三、解答题

21. 由 $y = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y = \frac{1}{x} \ln \tan x$, 两边对 x 求导有

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln \tan x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\tan x} \sec^2 x,$$

$$\text{所以 } y' = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right),$$

$$\text{故 } dy = (\tan x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\sec^2 x}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \ln \tan x \right) dx.$$

22. 由 $y = a \ln x + bx^2 + 3x$, 则 $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 3$.

因为 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 是极值点, 所以 $y'|_{x=1} = 0, y'|_{x=2} = 0$, 即

$$\begin{cases} a + 2b + 3 = 0, \\ \frac{a}{2} + 4b + 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -2, b = -\frac{1}{2}.$$

23. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} de^x = \int \frac{e^x + 1 - 1}{1+e^x} de^x$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+e^x} \right) de^x$$

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

另解, 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$,

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{(1+t)t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt$$

$$= \int \frac{t+1-1}{1+t} dt$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= t - \ln(1+t) + C$$

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

24. $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2y \cdot e^x}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{2x - 2e^{2x}}{x^2 - e^{2x}}.$$

25. 这次投篮的投中次数是随机变量, 设其为 X , 它可能取的值为 $0, 1, X=0$ 表示投中 0 次, 即投篮未中,

$P\{X=0\} = 1 - 0.3 = 0.7; X=1$ 表示投中一次, $P\{X=1\} = 0.3$, 故概率分布为

X	0	1
P	0.7	0.3

$$\text{分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.7, & 0 \leq x < 1, \\ 0.7 + 0.3 = 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

26. 令 $\int_0^1 f(t) dt = c$, 则由题设知 $f(x) = x + 2c$,

$$\text{所以 } c = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2c) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + 2c = \frac{1}{2} + 2c,$$

$$\text{故 } c = -\frac{1}{2}, \text{ 因此 } f(x) = x - 1.$$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} te^t \sin t dt}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin x^2 \cdot 2x}{6x^5}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \sin x^2}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cdot x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

28. 由 $\sqrt{3} \leq \sqrt{3+x} \leq 2 \quad x \in [0, 1],$

$$\text{则 } \sqrt{3} \cdot x^n \leq \sqrt{3+x} \cdot x^n \leq 2x^n.$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \int_0^1 x^n dx,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1},$$

$$\text{即 } 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 0.$$

$$\text{故由夹逼定理得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0.$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\int \sin 2x dx =$ 【 】

- A. $\cos 2x + C$ B. $-\cos 2x + C$
C. $\frac{1}{2}\cos 2x + C$ D. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

2. 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_0^x f(t) dt$ 是 【 】

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 非奇非偶函数 D. 周期函数

3. 称 e^{-x} 是无穷小量是指在下列哪一过程中它是无穷小量 【 】

- A. $x \rightarrow 0$ B. $x \rightarrow \infty$ C. $x \rightarrow +\infty$ D. $x \rightarrow -\infty$

4. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点 【 】

- A. 一定有定义 B. 一定有 $f(x_0) = A$
C. 一定连续 D. 极限一定存在

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$, 则 $f'(1) =$ 【 】

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $-\frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{6}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} =$ 【 】

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 不存在

7. 函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$, 在 $x = 1$ 处 【 】

- A. 有极大值 1 B. 有极小值 1
C. 有极小值 0 D. 无极值

8. 曲线 $y = 2 + (x - 4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 【 】

- A. $(4, 2)$ B. $x = 4$
C. $y = 2$ D. $(2, 4)$

9. $\int_1^e x \ln x dx =$ 【 】

- A. 0 B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$
C. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$ D. $e^2 - 1$

10. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	0.5	0.5

则 $E(X) =$ 【 】

- A. 0 B. 1 C. 0.5 D. 1.5

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} =$.

12. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, 则 $f(x_0) =$.

13. 设曲线 $y = x^2 + x - 2$ 在点 M 处切线的斜率为 2, 则点 M 的坐标为 .

14. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} - a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $y' =$.

15. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$.

16. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$.

17. 若 $f(x)$ 是奇函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_{-1}^0 f(x) dx =$.

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{x+\frac{1}{2}} =$.

19. 设 $z = (\sin x)^{\cos y} (0 < x < \pi)$, 则 $dz =$.

20. 设 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 - \cos 2x)}{x^2}, & x < 0, \\ 4, & x = 0, \\ \frac{b \sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续, 试确定 a, b 的值.

22. (本题满分 8 分)

求曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的水平渐近线和铅直渐近线.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2 + 3 \tan x}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

求函数 $z = 2x^3 + 3y^2$ 在 $x = 10, y = 8, \Delta x = 0.2, \Delta y = 0.3$ 时的全增量与全微分.

25. (本题满分 8 分)

某单位有 3 部汽车, 每天每部车需检修的概率为 $\frac{1}{5}$, 各部车是否需检修是相互独立的, 求一天内恰有 2 部车需检修的概率.

26. (本题满分 10 分)

已知函数 $y = f(x)$ 满足方程 $e^{xy} + \sin(x^2 y) = y$, 求 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

27. (本题满分 10 分)

计算 $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx$.

28. (本题满分 10 分)

证明: $2^x > x^2 (x > 4)$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d2x = \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C.$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt,$

则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du)$ (因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f(x) = f(-x)$) $= -\int_0^x f(u) du = -F(x),$

所以 $F(x)$ 是奇函数.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty,$ 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ 不存在,应选 C.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 从左右极限存在,可推出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$ 但不能推出其他几个结论,故选 D.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{2}},$ 所以 $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}},$ 故 $f'(1) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}.$

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1,$ 则 $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2,$ 令 $f'(x) = 0,$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1,$ 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0,$ 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0,$ 故 $f(x)$ 在 $x_3 = 1$ 处不取极值.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y = 2 + (x - 4)^{\frac{1}{3}}, y' = \frac{1}{3}(x - 4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9}(x - 4)^{-\frac{5}{3}},$ 函数在 $x = 4$ 处连续,当 $x < 4$ 时, $y'' > 0;$ 当 $x > 4$ 时, $y'' < 0,$ 所以点 $(4, 2)$ 为曲线的拐点.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e \right) = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了数学期望的知识点.

【应试指导】 由题意知, $E(X) = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = 0.5.$

二、填空题

11.【答案】 $\frac{5}{2}$

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\tan 2x}{2x}} \cdot \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$

注用洛必达法则也可解出.但最简便的方法是用等价无穷小代换.

12.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数可导的定义的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 x_0 可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,因此 $f(x)$ 在 x_0 处左连续,于是, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$ 而

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1,$ 故 $f(x_0) = 1.$

13.【答案】 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right)$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一处处的切线的知识点.

【应试指导】 $y = x^2 + x - 2, y' = 2x + 1,$ 由导数的几何意义可知,若点 M 的坐标为 $(x_0, y_0),$ 则 $2x_0 + 1 = 2,$

解得 $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}.$

14.【答案】 $e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) - a^x \ln a$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) - a^x \ln a = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1) - a^x \ln a.$

15.【答案】 $\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 4} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$

16.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_0^a =$

$\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) = \frac{1}{2}.$

注根据本题结构特点,容易想到凑微分, $2x dx = dx^2 = d(x^2 + 1).$

17.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, 即 $\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 0$, 所以 $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1$. 注若

$f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

18. 【答案】 e^{-1}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1} \cdot (-1) - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1} \cdot (-1)} \left(1 + \frac{-1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}$.

注: 此题也可考虑取对数后, 利用洛必达法则, 但这样较繁.

19. 【答案】 $\cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1} dx - \sin y (\sin x)^{\cos y} \cdot \ln \sin x dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y \cdot (\sin x)^{\cos y - 1} \cdot \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin x)^{\cos y} \cdot \ln \sin x \cdot (-\sin y)$, 所以 $dz = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1} dx - \sin y (\sin x)^{\cos y} \ln \sin x dy$.

20. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, 所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 2$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(1 - \cos 2x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \cdot 2 \sin 2x}{2x} = 2a, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (b \cos x + \cos x^2) \\ &= b + 1, \end{aligned}$$

又因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $b + 1 = 2a = 4$,

解得 $a = 2, b = 3$.

$$22. \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty,$$

所以 $x = 0$ 是曲线的铅直渐近线,

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线.

$$23. \text{ 因 } \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x dx = d \tan x,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2+3 \tan x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2+3 \tan x}} d \tan x \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{2+3 \tan x}} d(2+3 \tan x) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2+3 \tan x} + C. \end{aligned}$$

$$24. \text{ 记 } F(x, y) = 2x^3 + 3y^2, \text{ 则 } \frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2, \frac{\partial F}{\partial y} = 6y.$$

$$\text{故 } \Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$$

$$= F(10.2, 8.3) - F(10, 8)$$

$$= 2329.086 - 2192 = 137.086.$$

$$\text{又因 } \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(10, 8)} = 600, \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(10, 8)} = 48,$$

$$\text{所以 } dz \Big|_{(10, 8)} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(10, 8)} \times 0.2 + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(10, 8)} \times 0.3 = 120 + 14.4 = 134.4.$$

25. 需检修的车数为随机变量, 设其为 X , 依题意

$$X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right), \text{ 则 } P\{X = 2\} = C_3^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{3-2} = 0.096.$$

26. 方程两边对 x 求导得

$$e^{xy}(y + xy') + \cos(x^2 y) \cdot (2xy + x^2 y') = y',$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入得 $y' = 1$,

所以点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$.

注: 本题不必把 y' 解出后, 再求 $y' \Big|_{x=0}$, 那样太麻烦.

$$27. \text{ 令 } \sqrt{2x+1} = t, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}(t^2 - 1), dx = t dt.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int e^{\sqrt{2x+1}} dx &= \int e^t \cdot t dt \\ &= te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C \\ &= e^{\sqrt{2x+1}} (\sqrt{2x+1} - 1) + C. \end{aligned}$$

28. 令 $f(x) = 2^x - x^2 (x > 4)$, 则 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$, 由于此式不便判定符号, 故再求出 $f''(x)$.

$$\text{又因 } f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2 > 2^4 \ln^2 2 - 2 = 2(2 \ln 4 \cdot \ln 4 - 1) > 0, \text{ 所以 } f'(x) \text{ 单调增加, 故 } f'(x) > f'(4) =$$

$$2^4 \ln 2 - 8 = 8(2 \ln 2 - 1) = 8(\ln 4 - 1) > 0,$$

$$\text{得到 } f(x) \text{ 单调增加, 故 } f(x) > f(4), \text{ 即 } 2^x - x^2 > f(4) = 2^4 - 4^2 = 0,$$

$$\text{因此 } 2^x > x^2 (x > 4).$$