

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(文史财经类)

全真模拟(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设集合 $P = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$, 则 $P \cup N$ 是
A. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | 2 < x < 3\}$
C. $\{x | -1 < x < 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$ 【 】
- 已知 $f(x)$ 是偶函数且满足 $f(x+3) = f(x)$, $f(1) = -1$, 则 $f(5) + f(11)$ 等于
A. -2 B. 2 C. -1 D. 1 【 】
- 函数 $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4)$ 上是减函数, 则实数 m 的取值范围是
A. $m \geq -3$ B. $m = -3$ C. $m \leq -3$ D. $m \geq 3$ 【 】
- 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图像的对称轴是 $x = 1$, 并且通过点 $A(-1, 7)$, 则 a, b 的值分别是
A. 2, 4 B. 2, -4 C. -2, 4 D. -2, -4 【 】
- 若直线 l 沿 x 轴负方向平移 3 个单位, 再沿 y 轴正方向平移 1 个单位后, 又回到原来的位置, 那么直线 l 的斜率是
A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3 【 】
- $0.7^2, \log_2 0.7, 2^{0.7}$ 三个数之间的大小关系是
A. $0.7^2 < 2^{0.7} < \log_2 0.7$ B. $0.7^2 < \log_2 0.7 < 2^{0.7}$
C. $\log_2 0.7 < 0.7^2 < 2^{0.7}$ D. $\log_2 0.7 < 2^{0.7} < 0.7^2$ 【 】
- 点 $P(2, 5)$ 到直线 $x + y - 9 = 0$ 的距离是
A. $\frac{2\sqrt{29}}{29}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【 】
- 抛物线 $x^2 = -16y$ 上一点 P 到焦点的距离是 6, 则点 P 的坐标是
A. $(4\sqrt{2}, -2)$ B. $(4\sqrt{2}, 2)$ C. $(4, -1)$ D. $(-4, -1)$ 【 】
- 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 那么 $f(2x-1)$ 的定义域是
A. $[0, 1]$ B. $[-3, 1]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-1, 0]$ 【 】
- 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$ 的单调增区间是
A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2})$ 【 】

- 从红黄绿三种颜料中, 任选两种, 以重量为 1:1 配成一种新颜色, 能配成不同的种数为
A. 6 B. 12 C. 3 D. 8 【 】
- 已知 $A(-1, 0), B(2, 2), C(0, y)$, 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, 则 $y =$
A. 3 B. 5 C. -3 D. -5 【 】
- 函数 $f(x) = x(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2})$ ($x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$)
A. 是偶函数 B. 既是奇函数又是偶函数
C. 既不是奇函数, 也不是偶函数 D. 是奇函数 【 】
- 不等式 $2x^2 + 3mx + 2m > 0$ 的解集是实数集, 则 m 的取值范围是
A. $m < \frac{16}{9}$ B. $m > 0$ C. $0 < m < \frac{16}{9}$ D. $0 \leq m \leq \frac{16}{9}$ 【 】
- 甲袋内有 2 个白球 3 个黑球, 乙袋内有 3 个白球 1 个黑球, 现从两个袋内各摸出 1 个球, 摸出的两个球都是白球的概率是
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{4}{9}$ 【 】
- 已知函数 $f(x) = ax^2 + b$ 的图像经过点 $(1, 2)$ 且其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(3, 0)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式是
A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ B. $f(x) = -x^2 + 3$
C. $f(x) = 3x^2 + 2$ D. $f(x) = x^2 + 3$ 【 】
- 已知数列前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$, 则第 5 项的值是
A. 7 B. 10 C. 13 D. 16 【 】

第 II 卷(非选择题,共 65 分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

- 函数 $y = \sqrt{8 - 2^{x+1}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是_____.
- 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最大值为_____.
- 某小组有 11 名学生, 其中女生 4 名, 现选举 2 人当代表, 要求至少有一名女生当选, 则不同的选法有_____种.
- 已知 α, β 为锐角, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}, \cos(2\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\alpha =$ _____.

得分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

求函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x$ 的最大值与最小值, 以及使函数取得这些值的 x 的集合.

23. (本小题满分 12 分)

已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 的图像过点 $P(1, 0)$, 并且对于任意实数 x , 有 $f(1+x) = f(1-x)$, 求函数 $f(x)$ 的最值.

24. (本小题满分 12 分)

设椭圆的中心是坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 已知点 $P(0, \frac{3}{2})$ 到椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$, 求椭圆的方程.

25. (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是它的前 n 项和, 并且 $S_{n+1} = 4a_n + 2, a_1 = 1$.

(I) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(II) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;

(III) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和.

参考答案及解析

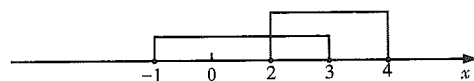
一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 此题可以采用图示法来得出答案.

由已知条件 $P = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, N = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$,



(1 题答案图)

$\therefore P \cup N = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数与周期函数的性质.

【应试指导】 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$,

又 $\because f(x+3) = f(x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期 $T = 3$, $\therefore f(1) = -1$,

$\therefore f(-1) = f(1) = -1$,

$\therefore f(5) + f(11) = f(2+3) + f(2+3 \times 3)$

$= f(2) + f(2) = 2f(2)$

$= 2f(-1+3) = 2f(-1)$

$= 2 \times (-1) = -2$.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为减函数的性质.

【应试指导】 由已知条件 $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 2$

$\Rightarrow f(x) = (x+m-1)^2 - (m-1)^2 + 2$,

故 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1-m$,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, 4)$ 上是减函数, $\therefore 1-m \geq 4$, 即 $m \leq -3$.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二次函数的对称性.

【应试指导】 由于二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图像的对称轴是 $x = 1$, 且过点 $A(-1, 7)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a - b + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

5. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的平移.

【应试指导】 由已知条件知直线经过两次平移后又回到原来的位置, 因为直线是满足条件的点集, 所以取直线上某一点来考查, 若设点 $P(x, y)$ 为 l 上的任一点, 则经过平移后的对应点也应在这条直线上, 这样, 可由直线上的两点确定该直线的斜率.

方法一: 设点 $P(x, y)$ 为直线 l 上的任一点, 当直线按已知条件平移后, 点 P 随之平移, 平移后的对应点为 $P'(x-3, y+1)$, 点 P' 仍在直线上, 所以直线的斜率 $k = \frac{y+1-y}{x-3-x} = -\frac{1}{3}$.

方法二: 设直线 l 的方程为 $y = kx + b$, 直线向左平移 3 个单位, 方程变为 $y = k(x+3) + b$, 再向上平移一个单位, 方程变为 $y = k(x+3) + b + 1$, 即 $y = kx + 3k + b + 1$, 此方程应与原方程相同, 对应项系数相等, 比较常数项可得, $3k + b + 1 = b$,

$$\therefore k = -\frac{1}{3}.$$

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 由指数函数、幂函数、对数函数的性质得

$$0.7^2 < 0.7^0 = 1, 2^{0.7} > 2^0 = 1,$$

$$\log_2 0.7 < \log_2 1 = 0, \therefore \log_2 0.7 < 0.7^2 < 2^{0.7}.$$

[注] 本题是指数函数、对数函数的性质的综合运用, 在这类比较大小的题中, 一般采取使它们分别与 0 或 1 进行比较的方法来确定它们之间的大小.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为点到直线的距离公式.

【应试指导】 由点到直线的距离公式得, $P(2, 5)$ 到直线 $x + y - 9 = 0$ 的距离为 $\frac{|2+5-9|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

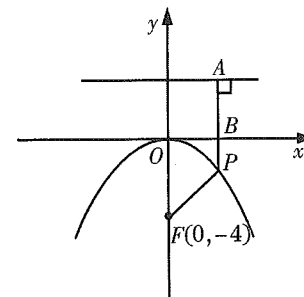
[注] 本题主要考查点 $A(x_1, y_1)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式 $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 的运用及综合

运算能力. 切记距离不能为负.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的定义.

【应试指导】 本题应从抛物线的定义去考虑.



(8 题答案图)

由 $x^2 = -16y$ 可得 $p = 8, \frac{p}{2} = 4$,

$\therefore F(0, -4)$,

$\therefore$ 准线方程 $y = 4$,

由题意得 $|PF| = 6$,

$\therefore |PA| = 6$,

$\therefore |AB| = 4$,

$\therefore |PB| = 2$,

$\therefore P$ 点的坐标为 $(x, -2)$,

$\therefore P(x, -2)$ 点在抛物线上,

$\therefore x^2 = -16 \times (-2) = 32$,

$\therefore x = \pm 4\sqrt{2}$,

$\therefore P(4\sqrt{2}, -2)$ 或 $P(-4\sqrt{2}, -2)$.

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 $\because f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$,

$\therefore f(2x-1)$ 的定义域为 $-1 \leq 2x-1 \leq 1$,

$\therefore 0 \leq x \leq 1$, 即 $[0, 1]$.

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调区间.

【应试指导】 $\because f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$ 中的 $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1, x^2 - x + 1 > 0$ 时, $u(x) = x^2 - x + 1$ 的减区间

就为 $f(x)$ 的增区间. 设 $u(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $u(x) > 0$, 函数 $u(x)$ 在

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上是减函数,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上是增函数,

故 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)$ 的单调增区间为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

【注】关于复合函数的问题要逐步分清每一层次的函数的图像和性质, 再结合起来考虑整体, 有时也可画出部分函数的图像来帮助分析和理解.

11.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为组合数.

【应试指导】 由已知条件可知颜色的配制与顺序无关属于组合问题, 所以新颜色的种数为, $C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$.

12.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为垂直向量的性质.

【应试指导】 此题是已知向量的两端点的向量垂直问题, 要根据两向量垂直的条件列出等式, 来求出未知数 y 的值.

由 $A(-1, 0), B(2, 2), C(0, y)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (3, 2), \overrightarrow{BC} = (-2, y-2)$,

$\because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$,

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 3 \times (-2) + 2(y-2) = 0 \Rightarrow -6 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 5$.

13.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 $\because f(x) = x\left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)$

$= x \cdot \frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$,

$\therefore f(-x) = (-x) \cdot \frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}$

$= (-x) \cdot \frac{\frac{1}{2^x}+1}{2\left(\frac{1}{2^x}-1\right)}$

$= (-x) \cdot \frac{\frac{2^x+1}{2^x}}{2 \cdot \frac{1-2^x}{2^x}}$

$= (-x) \cdot \frac{2^x+1}{2(1-2^x)}$

$= x \cdot \frac{2^x+1}{2(2^x-1)} = f(x)$,

$\therefore f(x) = x\left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)$ 是偶函数.

14.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 由 $2x^2 + 3mx + 2m > 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 又因为抛物线的开口向上, 所以方程 $2x^2 + 3mx + 2m = 0$ 无实根,

$\therefore \Delta = 9m^2 - 4 \times 2 \times 2m < 0, \therefore 9m^2 - 16m < 0, m(9m-16) < 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{16}{9}$.

15.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为相互独立事件同时发生的概率.

【应试指导】 由已知条件可知此题属于相互独立同时发生的事件, 从甲袋内摸到白球的概率为 $P(A) = \frac{2}{5}$, 乙袋

内摸到白球的概率为 $\frac{3}{4}$, 所以现从两袋中各摸出一个球, 摸出的两个都是白球的概率为 $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \times$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{10}$.

16.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反函数的性质.

【应试指导】 $\because f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 过 $(3, 0)$, 所以 $f(x)$ 又过点 $(0, 3)$ 所以有 $f(1) = 2, f(0) = 3$,

得 $\begin{cases} a+b=2 \\ a \times 0 + b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$,

$\therefore f(x) = -x^2 + 3$.

17.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列的前 n 项和.

【应试指导】 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}(3n^2 - n) - \frac{1}{2}[3(n-1)^2 - (n-1)] = 3n-2$, 当 $n=5$ 时, $a_5 = 3 \times 5 - 2 = 13$.

二、填空题

18.【答案】(1, 2]

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 要使函数 $y = \sqrt{8-2^{x+1}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 有意义,

$$\text{须使} \begin{cases} 8-2^{x+1} \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} \leq 2^3 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \leq 3 \\ x-1 \leq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 2.$$

19.【答案】 4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的最值.

【应试指导】 此题是高次函数的最值问题,可用导数来求函数在区间 $[-3,3]$ 上的最值.

$$\because f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

列出表格

x	-3	$(-3,1)$	1	$(1,3)$	3
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$	-108	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

由上表可知函数在 $[-3,3]$ 上,在 $x=1$ 点处有最大值4.

20.【答案】 34

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为分类计数原理.

【应试指导】 由已知条件可知此题与顺序无关属于组合问题, $\because$ 在11名学生中,女生有4名,现选举2人当代表,有一名是女生的选法有 $C_4^1 \cdot C_7^1$,有两名是女生的选法有 $C_4^2 \cdot C_7^0$,由分类计数原理得至少有一名女生当选的

$$\text{不同选法有: } C_4^1 \cdot C_7^1 + C_4^2 \cdot C_7^0 = 4 \times 7 + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 = 34.$$

21.【答案】 $\frac{56}{65}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两角和公式.

【应试指导】 $\because \alpha, \beta$ 为锐角, $\therefore 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, 0^\circ < 2\alpha + \beta < 270^\circ$,又 $\because \cos(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}, \cos(2\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$,

$$\therefore 0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ, 0^\circ < 2\alpha + \beta < 90^\circ, \therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}, \sin(2\alpha + \beta) = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \alpha &= \cos[(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)] \\ &= \cos(2\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + \sin(2\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} \\ &= \frac{56}{65}. \end{aligned}$$

三、解答题

$$\begin{aligned} 22. y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

要使函数有最大值须有 $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ 这时 } y_{\text{最大值}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\text{要使函数取最小值须有 } \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 这时 } y_{\text{最小值}} = -\frac{3}{4}.$$

23. $\because f(x) = x^2 + bx + c$, 对于任意实数 x 都有 $f(1+x) = f(1-x)$, 令 $x=1$ 则有

$$f(2) = f(0), \therefore f(2) = 4 + 2b + c,$$

$$f(0) = c, \therefore 4 + 2b + c = c, \therefore b = -2,$$

$$\text{又 } \because f(x) \text{ 的图像过 } P(1,0), \therefore 1 + b + c = 0,$$

$$\therefore c = 1, \therefore f(x) = x^2 - 2x + 1,$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2, \therefore \text{当 } x=1 \text{ 时 } f(x) \text{ 有最小值 } 0, f(x) \text{ 没有最大值.}$$

24. 由题意, 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{由 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \therefore \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2},$$

设 $P(0, \frac{3}{2})$ 点到椭圆上任一点的距离为 d ,

$$\begin{aligned} \text{则 } d^2 &= x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \\ &= a^2(1 - \frac{y^2}{b^2}) + y^2 - 3y + \frac{9}{4} \\ &= -3(y + \frac{1}{2})^2 + 4b^2 + 3, \end{aligned}$$

$\therefore -b \leq y \leq b$, $\therefore$ 若 $b < \frac{1}{2}$, 则在 $y = -b$ 时, d^2 最大, 即 d 也最大,

$$(\sqrt{7})^2 = b^2 + 3b + \frac{9}{4} \Rightarrow b = \sqrt{7} - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}, \text{ 这与 } b < \frac{1}{2} \text{ 矛盾.}$$

$\therefore b \geq \frac{1}{2}$, 这时 $y = -\frac{1}{2}$ 时, d^2 有最大值,

$$\text{即 } (\sqrt{7})^2 = 4b^2 + 3, \therefore b = 1, a = 2,$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

25. (I) $\because S_{n+1} = 4a_n + 2, \therefore S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$, 两式相减得 $S_{n+2} - S_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$,

$$\text{所以 } a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n),$$

$$\because b_n = a_{n+1} - 2a_n, \therefore b_{n+1} = 2b_n, \therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2,$$

故数列 $\{b_n\}$ 是以2为公比的等比数列.

$$\because S_2 = a_1 + a_2 = 4a_1 + 2, \text{ 且 } a_1 = 1, \therefore a_2 = 5, b_1 = a_2 - 2a_1 = 5 - 2 = 3, \text{ 故 } b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(II) \because c_n = \frac{a_n}{2^n}, \therefore c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

故数列 $\{c_n\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为公差的等差数列, 首项 $c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore c_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(n-1) = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}.$$

$$(III) a_n = 2^n \cdot c_n = 2^n \cdot (\frac{3}{4}n - \frac{1}{4}) = (3n-1) \cdot 2^{n-2},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = 4a_{n-1} + 2 = (3n-4) \cdot 2^{n-1} + 2,$$

由于 $S_1 = a_1 = 1$ 也适合公式, 故 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (3n-4) \cdot 2^{n-1} + 2$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(文史财经类)

全真模拟(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $M = \{x | x \leq \sqrt{10}\}$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 那么
A. $a \subset M$ B. $a \notin M$ C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subseteq M$ 【 】
2. $b = 0$ 是直线 $y = kx + b$ 过原点的
A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件 【 】
3. 函数 $y = 3^x$ 与 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的图像之间的关系是
A. 关于原点对称 B. 关于 x 轴对称
C. 关于直线 $y = 1$ 对称 D. 关于 y 轴对称 【 】
4. 点 $P(-5, 12)$ 到 y 轴的距离为
A. 12 B. 7 C. -5 D. 5 【 】
5. 直线 $2x + 5y - 6 = 0$ 关于 y 轴对称的直线方程是
A. $2x - 5y + 6 = 0$ B. $2x - 5y - 6 = 0$
C. $5x + 2y - 6 = 0$ D. $2x + 5y + 6 = 0$ 【 】
6. 设 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, x+1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 成等比数列, 则 x 等于
A. 1 或 -2 B. 1 或 -1 C. 0 或 -2 D. -2 【 】
7. 函数 $f(x) = 3 + 2x - \frac{1}{2}x^2$ 的最大值是
A. 4 B. 5 C. 2 D. 3 【 】
8. 已知函数 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ 且 $f(-2) = 10$, 则 $f(2)$ 等于
A. -26 B. -18 C. -10 D. 10 【 】

9. 若函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 则使得 $y = f(\sin x)$ 必为单调函数的区间是
A. $\mathbf{R}$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[-\sin 1, \sin 1]$ 【 】
10. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + 2 (x < -1)$, 则 $f^{-1}(2)$ 的值为
A. -2 B. 10 C. 0 D. 2 【 】
11. 从 15 名学生中选出两人担任正、副班长, 不同的选举结果共有
A. 30 种 B. 90 种 C. 210 种 D. 225 种 【 】
12. 若双曲线的两准线间的距离等于它的半焦距, 则双曲线的离心率为
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. 以上都不对 【 】
13. $y = \cos^2 4x$ 的最小正周期是
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. 2π D. π 【 】
14. 不等式 $|2x - 7| \leq 3$ 的解集是
A. $\{x | x \geq 2\}$ B. $\{x | x \leq 5\}$
C. $\{x | 2 \leq x \leq 5\}$ D. $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 5\}$ 【 】
15. 甲乙两人各进行射击, 甲击中目标的概率是 0.3, 乙击中目标的概率是 0.6, 那么两人都击中目标的概率是
A. 0.18 B. 0.6 C. 0.9 D. 1 【 】
16. 已知 b_1, b_2, b_3, b_4 成等差数列, 且 b_1, b_4 为方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $b_2 + b_3$ 的值为
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$ 【 】
17. 已知 $\sin \theta \cdot \tan \theta > 0$, 则 θ 角的终边在
A. 第一、二象限 B. 第二、三象限 C. 第三、四象限 D. 第一、四象限 【 】

第 II 卷(非选择题,共 65 分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

18. 函数 $y = [\lg(2^x - 1)]^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是_____.
19. 过 $(1, 2)$ 点且平行于向量 $a = (2, 2)$ 的直线方程为_____.
20. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边边长, 已知 $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$, 则 $\angle A =$ _____.
21. 不等式 $|6x - \frac{1}{2}| \geq \frac{3}{2}$ 的解集是_____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

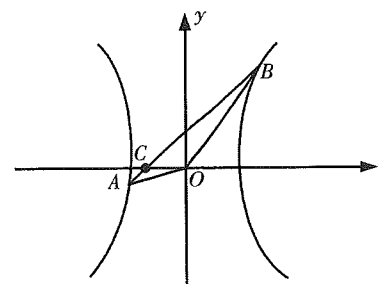
已知直线在 x 轴上的截距为 -1 ,在 y 轴上的截距为 1 ,又抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(2, -8)$,求直线和抛物线两个交点横坐标的平方和.

23. (本小题满分 12 分)

用边长为 120cm 的正方形铁皮做一个无盖水箱,先在四角分别截去一个边长相等的小正方形,然后把四边垂直折起焊接而成,问剪去的小正方形的边长为多少时,水箱容积最大?最大容积是多少?

24. (本小题满分 12 分)

如图:双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 交于 A, B 两点,且 $\triangle AOB$ 的面积为 $4\sqrt{7}$,求截距 b 的值.



(24 题图)

25. (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_n > 0 (n \in \mathbf{N})$,前 n 项和为 S_n ,且 $S_n = \frac{1}{8}(a_n + 2)^2$.

(I) 求证数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = t^{\frac{a_n+2}{4}}, t \in (0, 1), T_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,求 T_n 的表达式.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为元素与集合的关系.

【应试指导】 $\because M = \{x \mid x \leq \sqrt{10}\}, a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$,

M 是集合, a 为元素, $\{a\}$ 为集合, 元素与集合的关系是“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”; 集合与集合的关系是“ $\subset$ ”或“ $\supset$ ”,

$\therefore A, C$ 被排除, $\because (\sqrt{10})^2 = 10$,

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $\therefore \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$,

$\therefore a \in M$,

$\therefore B$ 被排除, 故应选 D.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $b = 0 \Leftrightarrow$ 直线 $y = kx + b$ 过原点.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的对称性.

【应试指导】 $\because y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow y = 3^{-x}$,

$\therefore y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ 关于 y 轴对称.

【注】点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称的点为 $P'(-x, y)$, 关于 x 轴对称的点为 $P''(x, -y)$, 关于原点对称的点为 $P'''(-x, -y)$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为点到直线的距离.

【应试指导】 由点 P 的坐标 $(-5, 12)$ 知, 点 P 到 y 轴的距离为 $|x| = 5$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的对称性.

【应试指导】 图形的对称性, 就是图形上任一点的坐标的对称性.

设直线 $2x + 5y - 6 = 0$ 上任一点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-x, y)$, 把点 $P'(-x, y)$ 的坐标代入方程 $2x + 5y - 6 = 0$ 整理得所求直线方程是 $2x - 5y + 6 = 0$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列.

【应试指导】 由已知条件得 $(x+1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 \Rightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0$ 或 $x = -2$.

7.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的最值.

【应试指导】 方法一: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5,$$

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有最大值 5.

方法二: $f'(x) = -x + 2$, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, 在 $(-\infty, 2)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 $(2, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$, $\therefore$ 函数在

$x = 2$ 处有最大值 $f(2) = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 5$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为已知函数求值.

【应试指导】 $\because f(-2) = 10$,

$\therefore f(-2) = -32 - 8a - 2b - 8 = 10$,

$\therefore 8a + 2b = -50$,

$\therefore f(2) = 32 + 8a + 2b - 8 = 32 - 50 - 8 = -26$.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调区间.

【应试指导】 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, $\therefore y = f(x)$ 的单调区间为 $[-1, 1]$,

$\therefore y = f(\sin x)$, $\therefore -1 \leq \sin x \leq 1$,

$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反函数的性质.

【应试指导】 方法一: 由 $f(x) = x^2 + 2x + 2$, 得 $f(x) = (x+1)^2 + 1$,

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时, $f(x)$ 有反函数存在,

$\therefore y = (x+1)^2 + 1 (x < -1, y > 1)$,

$\therefore x = -1 - \sqrt{y-1}$,

$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} - 1 (x > 1)$,

$\therefore f^{-1}(2) = -\sqrt{2-1} - 1 = -2$.

方法二: $\because f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数,

$\therefore f^{-1}(2)$ 中的 $x = 2$, 就为 $f(x) = 2$,

$\therefore x^2 + 2x + 2 = 2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$,

$\therefore x < -1, \therefore x = -2$.

【注】函数 $y = f(x)$ 的值域 B 是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域, $y = f(x)$ 的定义域 A 是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域, 则有 $f(a) = b, a \in A \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a, b \in B$, 方法二就是利用互为反函数间的关系, 使计算更加简单快捷.

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 由已知条件可知本题属于排列问题, $\therefore P_{15}^2 = 15 \times 14 = 210$.

12.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的离心率.

【应试指导】 由已知得 $\frac{2a^2}{c} = c, \therefore 2a^2 = c^2, \frac{c^2}{a^2} = 2, \therefore \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

13.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最小正周期.

【应试指导】 三角函数周期及最值的求法, 首先要化高次为一次, 化多个三角函数为一个三角函数.

$$y = \cos^2 4x = \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8x, \therefore T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

14.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 由 $|2x-7| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x-7 \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$.

15.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为独立同步试验的概率.

【应试指导】 由题意可知本试验属于独立同步试验,应用乘法公式,设甲、乙命中目标的事件分别为 A、B,则

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.6, P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \times 0.6 = 0.18.$$

16.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列的性质.

【应试指导】 由根与系数的关系得 $b_1 + b_4 = \frac{3}{2}$, 由等差数列的性质得 $b_2 + b_3 = b_1 + b_4 = \frac{3}{2}$.

17.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数角的判定.

【应试指导】 由已知得 $\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \tan\theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta$ 在第一象限, $\begin{cases} \sin\theta < 0 \\ \tan\theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \theta$ 在第四象限, 所以 θ 的终边在第一、四象限.

二、填空题

18.【答案】 $[1, +\infty)$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 要使函数 $y = [\lg(2^x - 1)]^{\frac{1}{2}}$ 有意义, 需使

$$\begin{cases} \lg(2^x - 1) \geq 0 \\ 2^x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(2^x - 1) \geq \lg 1 \\ 2^x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 1 \geq 1 \\ 2^x > 2^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2 \\ 2^x > 2^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1,$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\{x | x \geq 1\} = [1, +\infty)$.

19.【答案】 $x - y + 1 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的斜截式方式.

【应试指导】 设所求直线为 l , $\because k_a = 1, l \parallel a$,

$\therefore k_l = k_a = 1$, 又 $\because l$ 过点 $(1, 2)$,

$\therefore l$ 的方程为 $y - 2 = 1 \times (x - 1)$, 即 $x - y + 1 = 0$.

20.【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为余弦定理.

【应试指导】 由已知得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 即 $\cos A = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle A = \frac{\pi}{3}$.

21.【答案】 $\{x | x \geq \frac{1}{3} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{6}\}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $|6x - \frac{1}{2}| \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 6x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ 或 } 6x - \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{6}$.

三、解答题

22. 由题意得直线方程为 $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$, 即 $y = x + 1$,

由已知抛物线的顶点为 $(2, -8)$, 则它的方程为 $y = (x - 2)^2 - 8$,

即 $y = x^2 - 4x - 4$,

由方程组 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 4x - 4 \end{cases}$, 得 $x^2 - 5x - 5 = 0$,

设直线与抛物线两交点的横坐标为 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = -5$,

于是 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25 + 2 \times 5 = 35$,

即直线与抛物线两交点的横坐标的平方和为 35.

23. 设剪去的小正方形边长为 $x(\text{cm})$, 则水箱底边长为 $120 - 2x$, 则水箱容积为

$$V(x) = (120 - 2x)^2 x (0 < x < 60),$$

$$\text{即 } V(x) = 4x^3 - 480x^2 + 120^2 x.$$

$$\therefore V'(x) = 12x^2 - 960x + 120^2 = 12(x - 60)(x - 20),$$

令 $V'(x) = 0$ 解得 $x_1 = 20, x_2 = 60 \notin (0, 60)$ 舍去,

$\therefore$ 函数 $V(x)$ 在区间 $(0, 60)$ 上只有一个驻点, 这个驻点即是极值点也是最值点,

$$V(20) = (120 - 2 \times 20)^2 \times 20 = 128000(\text{cm}^3),$$

$\therefore$ 剪去的小正方形边长为 20cm 时水箱容积最大为 128000cm^3 .

24. 设 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ,

把 $y = \frac{1}{3}x + b$ 代入 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, 整理得 $x^2 - 2bx - 3b^2 - 12 = 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2b, x_1 x_2 = -3b^2 - 12,$$

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = 4\sqrt{b^2 + 3},$$

$$|y_2 - y_1| = \frac{1}{3}|x_2 - x_1| = \frac{4}{3}\sqrt{b^2 + 3},$$

设 AB 交 x 轴于 C 点, 则 $OC = |3b|$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{2}OC \cdot |y_1| + \frac{1}{2}OC \cdot |y_2|$$

$$= \frac{1}{2}OC \cdot |y_2 - y_1|$$

$$= \frac{1}{2}|3b| \cdot \frac{4}{3}\sqrt{b^2 + 3},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 4\sqrt{7}, \therefore \frac{1}{2}|3b| \cdot \frac{4}{3}\sqrt{b^2 + 3} = 4\sqrt{7}, \text{解之得 } b = \pm 2.$$

25. (I) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{8}[(a_n + 2)^2 - (a_{n-1} + 2)^2] = \frac{1}{8}(a_n^2 + 4a_n + 4 - a_{n-1}^2 - 4a_{n-1} - 4)$,

$$\text{整理得 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 4) = 0,$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_n - a_{n-1} = 4,$$

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{8}(a_1 + 2)^2 \Rightarrow a_1 = 2,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 2 为首项, 以 4 为公差的等差数列.

(II) $\because a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$,

$$\therefore b_n = t^{\frac{4n-2+2}{4}} = t^n = t \cdot t^{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以 t 为首项, t 为公比的等比数列,

$$\therefore T_n = \frac{t(1-t^n)}{1-t}.$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(文史财经类)

全真模拟(三)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $M = \{a, b\}$, $N = \{b, c\}$, 满足 $P \subseteq \{M \cup N\}$ 的集合 P 的个数是
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
2. 已知 $a = (3, 2)$, $b = (-4, 6)$, 则 $\langle a, b \rangle =$
A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. π
3. 已知直线 l 与直线 $2x - 3y + 5 = 0$ 平行, 则 l 的斜率为
A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 15$, $a_3 = -5$, 则前 8 项的和等于
A. -60 B. -140 C. -175 D. -125
5. 已知 $\cot \alpha = 2$, 且 $\cos \alpha < 0$, 则 $\sin \alpha$ 的值等于
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{5}$
6. 命题甲: $|x| > 5$, 命题乙: $x > 5$, 则
A. 甲是乙的充分但不必要条件
B. 甲是乙的必要但不充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
7. 当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x) = 2ax^2 + (a-1)x + 3$ 的对称轴方程为
A. $x = 0$ B. $y = 0$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = 3$
8. 双曲线 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{5} = 1$ 与直线 $y = 2x + 1$ 的公共点的个数是
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

9. 函数 $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值和最小值分别是
A. 2 和 -2 B. 2, 没有最小值 C. 1 和 1 D. 2 和 4
10. 函数 $y = \sin \frac{x}{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})$ 的最小正周期是
A. 4π B. π C. 2π D. $\frac{\pi}{2}$
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且满足 $f(2x) = 3^x$, 则 $f(x)$ 的反函数为
A. $y = \log_2 x^3$ B. $y = 2\log_3 x$ C. $y = \frac{1}{2}\log_3 x$ D. $y = \log_3 x^{\frac{1}{2}}$
12. 若函数 $f(x) = 1 + \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则
A. $a > 1$ B. $a > 2$ C. $1 < a < 2$ D. $0 < a < 1$
13. 5 人排成一排, 如果甲必须站在排头或排尾, 而乙不能站在排头或排尾, 不同的排法种数是
A. 18 B. 36 C. 48 D. 60
14. 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点是 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上, $\triangle PF_1F_2$ 的周长是
A. $6 + 4\sqrt{3}$ B. 18 C. 15 D. $6 - 4\sqrt{3}$
15. 直线 $2x - y + 7 = 0$ 与圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$ 的位置关系是
A. 相离 B. 相交但不过圆心
C. 相切 D. 相交且过圆心
16. 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = f(x)\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ 的奇偶性是
A. 奇函数 B. 偶函数
C. 是非奇非偶函数 D. 既是奇函数, 又是偶函数
17. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, a, b 分别为 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的对边, $\angle C = 90^\circ$, $b = 8$, $\angle A = 15^\circ$, 则 $a =$
A. $16 - 8\sqrt{3}$ B. $16 + 8\sqrt{3}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $8\sqrt{6} - 8\sqrt{2}$

第 II 卷(非选择题,共 65 分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

18. 曲线 $y = x^4 + x^3$ 在点 $(-1, 0)$ 处的切线方程为_____.
19. 函数 $y = \lg(x^2 - x - 2)$ 的定义域为_____.
20. 从 5 位男生和 4 位女生中选出 2 人作代表, 恰好一男生和一女生的概率是_____.
21. 任选一个不大于 20 的正整数, 它恰好是 3 的整数倍的概率是_____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22.(本小题满分 12 分)

已知抛物线经过点(2,3),对称轴方程为 $x = 1$,且在 x 轴上截得的弦长为 4,试求抛物线的解析式.

23.(本小题满分 12 分)

问数列: $\lg 100, \lg(100\sin 45^\circ), \lg(100\sin^2 45^\circ), \dots, \lg(100\sin^{n-1} 45^\circ)$ 前几项和最大?并求最大值.
($\lg 2 = 0.3010$)

24.(本小题满分 12 分)

已知三角形的一个内角是 $\frac{\pi}{3}$,面积是 $10\sqrt{3}$,周长是 20,求各边的长.

25.(本小题满分 13 分)

已知椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和一开口向右,顶点在原点的抛物线有公共焦点,设 P 为该椭圆与抛物线的一个交点,如果 P 点的横坐标为 $\frac{1}{2}$,求此椭圆的离心率.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的真子集.

【应试指导】 方法一:由已知条件得: $M \cup N = \{a, b, c\}$,

$\because P \subseteq \{a, b, c\}$,

$\therefore$ 满足条件的集合 P 为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

方法二: P 是集合 $\{a, b, c\}$ 的真子集,所以它的个数为 $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$.

2.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的夹角.

【应试指导】 $a \cdot b = 3 \times (-4) + 2 \times 6 = 0, \therefore a \perp b$,

$\because 0 \leq \langle a, b \rangle < \pi, \therefore \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$.

3.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的斜率.

【应试指导】 已知直线 l 与直线 $2x - 3y + 5 = 0$ 平行,故 $k_l = \frac{2}{3}$.

4.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列.

【应试指导】 由已知条件及等差数列的定义得

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 15 \\ a_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 15 \\ a_1 + 2d = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{35}{3} \\ d = -\frac{25}{3} \end{cases}$$

求和方法一: $\because a_8 = a_1 + 7d$

$$= \frac{35}{3} + 7 \times \left(-\frac{25}{3}\right) \\ = -\frac{140}{3},$$

$$\therefore S_8 = \frac{8(\frac{35}{3} - \frac{140}{3})}{2} = -140.$$

$$\text{方法二: } S_8 = 8 \times \frac{35}{3} + \frac{8(8-1)}{2} \times \left(-\frac{25}{3}\right) = -140.$$

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的变换.

$$\text{【应试指导】 由题意得方程组 } \begin{cases} \cot \alpha = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ \cos \alpha < 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $\because |x| > 5 \nRightarrow x > 5$, 而 $x > 5 \Rightarrow |x| > 5$,

$\therefore$ 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件.

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的对称轴.

【应试指导】 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 2x^2 + 3$, 此时抛物线的对称轴方程为 $x = 0$.

[注] 当二次函数式中的一次项系数 $b = 0$ 时, 函数图像的对称轴就为 y 轴, 反之也成立.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的交点.

$$\text{【应试指导】 } \begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{5} = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 11x^2 + 20x - 40 = 0,$$

$$\because \Delta = 400 + 4 \times 11 \times 40 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore$ 方程组有两个不同的解, 故双曲线与直线有两个公共点.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的最值.

【应试指导】 $f(x) = -x^2 + 4x - 2 = -(x-2)^2 + 2$,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $y_{\text{最大值}} = 2$,

又 $\because f(1) = 1, f(4) = -2$,

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, $y_{\text{最小值}} = -2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最小正周期.

$$\text{【应试指导】 } \because y = \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin x,$$

$\therefore$ 函数的最小正周期 $T = 2\pi$.

11.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的反函数.

【应试指导】 令 $2x = t$, 则 $x = \frac{t}{2}$,

$\therefore$ 有 $f(t) = 3^{\frac{t}{2}}$,

$\therefore f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, 即 $y = 3^{\frac{x}{2}} (x \in \mathbf{R})(y > 0)$,

$\therefore \frac{x}{2} = \log_3 y, \therefore x = 2\log_3 y$,

$\therefore y = 2\log_3 x (x > 0)$ 是 $f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$ 的反函数.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的增减性.

【应试指导】 由已知条件 $f(x) = 1 + \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 及对数函数 $y = \log_a x$ 的性质可得底数 $0 < a < 1$.

13.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 5人排成一排, 甲必须站在排头或排尾共有 P_2^1 种排法, 而乙不能站在排头或排尾, 他只能站在除排头、排尾以外的三个位置上的一个, 共有 P_3^1 种排法, 其余3个人站在除甲、乙两个位置以外的三个位置上共有 P_3^3 种排法, 由分步计数原理得满足条件的排法共有 $P_2^1 \cdot P_3^1 \cdot P_3^3 = 36$ 种.

14.【答案】 A

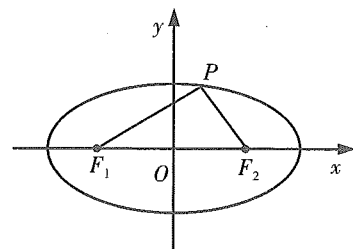
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的性质.

【应试指导】 由方程 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $a^2 = 12, b^2 = 3$,

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 3 = 9,$$

$$\therefore c = 3, a = 2\sqrt{3},$$

如图由椭圆的定义可知 $\triangle PF_1F_2$ 的周长等于 $|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2a + 2c = 4\sqrt{3} + 6$.



(14 题答案图)

15.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线与圆的位置关系.

【应试指导】 易知圆心坐标为 $(1, -1)$, 圆心到直线 $2x - y + 7 = 0$ 的距离 $d = \frac{|2 \times 1 + 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 圆的半径 $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

$\therefore d = r, \therefore$ 直线与圆相切.

[注] 关于直线与圆的位置关系判断的方法有: (1) 设 d 为圆心到直线的距离, r 为圆的半径, ① 当 $d < r$ 时, 直线与圆相交; ② 当 $d = r$ 时, 直线与圆相切; ③ 当 $d > r$ 时, 直线与圆相离. (2) 图示法. 已知直线和圆的方程时在同一坐标系内画出它们的图像即可得出. (3) 求交点法. 解直线方程与圆的方程联立的方程组, 求解的个数, ① 若方程组有两组不同的解则直线与圆相交; ② 方程组有一组解则直线与圆相切; ③ 方程组无实数解则直线与圆相离.

16.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 $\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore F(x) = f(x)(-\cos x) = -f(x)\cos x,$$

$$\therefore F(-x) = -f(-x)\cos(-x) = f(x)\cos x = -F(x),$$

$$\therefore F(x) = f(x)\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \text{ 为奇函数.}$$

【注】 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数; 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数; 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数.

17.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直角三角形的解法.

【应试指导】 $\because \angle C = 90^\circ, b = 8, \angle A = 15^\circ,$

$$\therefore a = b \tan 15^\circ$$

$$= 8 \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= 8 \times \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= 8 \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 16 - 8\sqrt{3}.$$

二、填空题

18.【答案】 $x + y + 1 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的切线方程.

【应试指导】 由曲线 $y = x^4 + x^3$ 得 $y' = 4x^3 + 3x^2, y'|_{x=-1} = -1$, 所以切线方程为 $y = -(x+1)$ 即 $x + y + 1 = 0$.

19.【答案】 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的定义域.

【应试指导】 要使函数 $y = \lg(x^2 - x - 2)$ 有意义, 必须使 $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ 或 $x < -1$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

20.【答案】 $\frac{5}{9}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 从 5 位男生和 4 位女生中任选 2 人的选法共有 C_9^2 种, 恰好一男生和一女生的选法共有 $C_5^1 \cdot C_4^1$ 种,

所以恰好选出一男生和一女生的概率是 $\frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}$.

21.【答案】 $\frac{3}{10}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等可能事件的概率.

【应试指导】 设 n 为不大于 20 的正整数的个数, 则 $n = 20, m$ 为在这 20 个数中 3 的倍数: 3、6、9、12、15、18 的个

数, $\therefore m = 6, \therefore$ 所求的概率 $= \frac{m}{n} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

三、解答题

22. 设抛物线 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 与 x 轴的两交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$,

由 $|AB| = 4$, 对称轴为 $x = 1$ 得 $x_1 = 1 - 2 = -1, x_2 = 1 + 2 = 3$,

$\therefore y = a(x+1)(x-3)$, 又 $\because$ 抛物线过点 $(2, 3)$,

$$\therefore 3 = a(2+1)(2-3), \text{ 得 } a = -1,$$

故所求的抛物线方程为 $y = -(x+1)(x-3)$,

$$\text{即 } y = -x^2 + 2x + 3.$$

23. 方法一, 由对数的运算法则, 原数列化简为

$$2, 2 - \frac{1}{2}\lg 2, 2 - \lg 2, 2 - \frac{3}{2}\lg 2, \dots, 2 - \frac{1}{2}(\lg 2)(n-1),$$

可知此数列是以 2 为首项以 $-\frac{1}{2}\lg 2$ 为公差的等差数列.

$$\therefore S_n = \frac{n\{2 + [2 - \frac{1}{2}(\lg 2)(n-1)]\}}{2} = (-\frac{1}{4}\lg 2)n^2 + (\frac{1}{4}\lg 2 + 2)n,$$

把前 n 项和看作是以 n 为自变量的二次函数, $a = -\frac{1}{4}\lg 2, b = \frac{1}{4}\lg 2 + 2, \therefore a < 0, \therefore S_n$ 有最大值,

$$\therefore \text{当 } n = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{4}\lg 2 + 2}{2 \times (-\frac{1}{4}\lg 2)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\lg 2} \approx 14,$$

即 $n = 14$ 时, S_n 的值最大, 最大值为

$$S_{14} = \frac{14[2 + 2 - \frac{13}{2}(\lg 2)]}{2} \approx 14.3.$$

方法二: 由方法一知 $d = -\frac{1}{2}\lg 2 < 0, \therefore$ 数列 $\{a_k\}$ 为递减数列, 若 $a_k \geq 0, a_{k+1} < 0$, 则前 k 项和最大,

$$\begin{cases} a_k \geq 0 \\ a_{k+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow 13.3 < k \leq 14.3, \therefore k \in \mathbf{Z}_+,$$

$\therefore k = 14$, 故前 14 项和最大, 最大值约为 14.3.

24. 设三角形三边分别为 $a, b, c, \angle A = 60^\circ$,

$$\text{由已知得 } \begin{cases} \frac{1}{2}bc \sin A = 10\sqrt{3} \\ a + b + c = 20 \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases},$$

解之得 $a_1 = 7, b_1 = 5, c_1 = 8$ 或 $a_2 = 7, b_2 = 8, c_2 = 5$,

故三边长分别为 7, 5, 8.

25. 设抛物线方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$, 由已知得椭圆焦点在 x 轴上, $a = 1, \therefore 0 < b < 1$,

半焦距 $c = \sqrt{1 - b^2}$, 因为抛物线与椭圆有公共焦点, 所以 $\frac{p}{2} = c$,

$\therefore p = 2c$, 抛物线方程为 $y^2 = 4cx$, 代入椭圆方程得 $x^2 + \frac{4cx}{b^2} = 1$, 即 $b^2 x^2 + 4cx - b^2 = 0$,

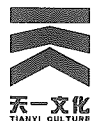
设 P 点的横坐标为 x_p , 则 $x_p > 0$,

$$\text{且 } x_p = \frac{-2c + \sqrt{4c^2 + b^4}}{b^2} = \frac{-2c + 2 - b^2}{b^2},$$

设椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a}, \therefore a = 1, \therefore e = c$,

$$\therefore x_p = \frac{-2e + 1 + e^2}{1 - e^2} = \frac{1 - e}{1 + e},$$

$$\therefore x_p = \frac{1}{2}, \therefore \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } e = \frac{1}{3}.$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(文史财经类)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共85分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共17小题,每小题5分,共85分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设集合 $M = \{2\}$, $N = \{1, 2\}$, $S = \{1, 2, 4\}$, 则 $(M \cup N) \cap S$ 是
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{4\}$ D. $\{1, 2, 4\}$ 【 】
- 命题甲: $x > y$ 且 $xy > 0$, 命题乙: $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, 则
A. 甲是乙的充分条件, 但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件, 但不是充分条件
C. 甲是乙的充分必要条件
D. 甲不是乙的必要条件也不是乙的充分条件 【 】
- 已知函数 $y = x^2 + ax + a$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$, 则 a 等于
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. -1 D. $-\frac{1}{2}$ 【 】
- 不等式 $|x + 3| > 5$ 的解集为
A. $\{x | x > 2\}$ B. $\{x | x < -8 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $\{x | x < -8\}$ D. $\{x | x > 3\}$ 【 】
- 过曲线 $y = (x - 1)^2$ 上一点 $(-1, 4)$ 的切线斜率为
A. -4 B. 0 C. 2 D. -2 【 】
- 已知向量 $a = (3, 1)$, $b = (-2, 5)$, 则 $3a - 2b =$
A. $(2, 7)$ B. $(13, -7)$ C. $(2, -7)$ D. $(13, 13)$ 【 】
- 已知双曲线上一点到两焦点 $(-5, 0)$, $(5, 0)$ 距离之差的绝对值等于6, 则双曲线方程为
A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ 【 】

- 椭圆的长轴是短轴的二倍, 则椭圆的离心率是
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【 】
- $y = (1 - x^2)^2$ 的导数是
A. $2 - 2x^2$ B. $2x^2 - 3$ C. $4x^3 - 4x$ D. $4x - 4x^3$ 【 】
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 + a_8 = 5$, 那么 $a_2 + a_{11}$ 的值等于
A. 5 B. 10 C. 15 D. 20 【 】
- 把6个苹果平均分给3个小孩, 不同的分配方法有
A. 90种 B. 30种 C. 60种 D. 15种 【 】
- 已知 $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$ ($\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$), 则 $\tan \alpha$ 等于
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{2}{3}$ 【 】
- 下列函数中为偶函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数的是
A. $y = \log_3 x^2$ B. $y = x^2 - x$ C. $y = -3^{|x|}$ D. $y = \sqrt[3]{x^2}$ 【 】
- 函数 $y = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为
A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. 2π 【 】
- 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是
A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ B. $y = 3 + x^3$
C. $y = 2 - x^2$ D. $y = (\frac{1}{3})^x$ 【 】
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 两个锐角为 $\angle A, \angle B$, 则 $\sin^2 A + \sin B$
A. 有最大值 $\frac{5}{4}$, 无最小值 B. 有最大值2, 最小值 $-\frac{5}{4}$
C. 无最大值, 有最小值 $\frac{3}{4}$ D. 既无最大值又无最小值 【 】
- 在四边形 $ABCD$ 中: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则四边形一定是
A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形 【 】

第Ⅱ卷(非选择题,共65分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分)

- 函数 $y = \sqrt{2 - 3x + x^2}$ 的定义域是_____。
- 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = a$, 计算 $\sin \alpha \cos \alpha =$ _____。
- 在 y 轴上的截距为2且与斜率为 $\frac{2}{5}$ 的直线垂直的直线方程是_____。
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, BC = 5, AC = 7$, 则 $\cos B =$ _____。

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22.(本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,已知三边 a, b, c 成等差数列,且最大角 $\angle A$ 是最小角的 2 倍,求 $a : b : c$.

23.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = 4x^2 - mx + 5 (x \in \mathbf{R})$ 在 $(-\infty, -2]$ 上是减函数,在 $[-2, +\infty)$ 上是增函数,求 $f(1)$ 的值,并比较 $f(-4)$ 与 $f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的大小.

24.(本小题满分 12 分)

设 $f(x) = a^{x-1}$,其中常数 $a > 0$,如果 $\{x_n\}$ 是等差数列,且 $x_n = 2n - 1$,

(I) 求证: $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{f(x_n)\}$ 的前 n 项和 S_n 的表达式.

25.(本小题满分 13 分)

弹簧的伸长与下面所挂砝码的重量成正比,已知弹簧挂 20g 重的砝码时长度是 12cm,挂 35g 重的砝码时长度是 15cm,写出弹簧长度 $y(\text{cm})$ 与砝码重 $x(\text{g})$ 的函数关系式,并求弹簧不挂砝码时的长度.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 由交集、并集的运算可得 $(M \cup N) \cap S = \{1, 2\}$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 0 \Rightarrow \frac{y-x}{xy} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y < 0 \\ xy < 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x > y \\ xy > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < y \\ xy < 0 \end{cases}$,

$\therefore$ 甲 $\Rightarrow$ 乙, 但乙 $\nRightarrow$ 甲.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的对称轴.

【应试指导】 $\because y = x^2 + ax + a$ 的对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$, $\therefore -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$, $\therefore a = 1$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $|x+3| > 5 \Rightarrow x+3 > 5$ 或 $x+3 < -5 \Rightarrow x > 2$ 或 $x < -8$,

$\therefore |x+3| > 5$ 的解集为 $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < -8\}$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线切线的斜率.

【应试指导】 由 $y = (x-1)^2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' |_{x=-1} = (2x-2) |_{x=-1} = 2 \times (-1) - 2 = -4$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的坐标运算.

【应试指导】 由 $a = (3, 1)$, $b = (-2, 5)$, 则

$$3a - 2b = 3 \cdot (3, 1) - 2 \cdot (-2, 5) \\ = (13, -7).$$

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的定义.

【应试指导】 由已知条件知双曲线焦点在 x 轴上属于第一类标准式, 又知 $c = 5$, $2a = 6$,

$$\therefore a = 3, \therefore b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16, \therefore \text{所求双曲线的方程为 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的离心率.

【应试指导】 设半长轴和半短轴长度分别为 $a, b (a > 0, b > 0)$, 由已知条件得 $a = 2b$,

$$\therefore b = \frac{1}{2}a,$$

$$\because c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的导数.

【应试指导】 方法一: $y' = 2(1-x^2)(1-x^2)' = 2(1-x^2)(-2x) = -4x + 4x^3$.

方法二: $y = (1-x^2)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$,

$$\therefore y' = 4x^3 - 4x.$$

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列的性质.

【应试指导】 此题若用等差数列的通项公式较为麻烦, 用等差数列的性质: 若 $m+n=p+q$, 则

$$a_m + a_n = a_p + a_q \text{ 较为简单.}$$

$$\because 5+8=2+11,$$

$$\therefore a_2 + a_{11} = a_5 + a_8 = 5.$$

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为分步计数原理.

【应试指导】 因为把 6 个苹果平均分给 3 个小孩与顺序无关属于组合, 第一步从 6 个苹果中任取 2 个分配给 3 个小孩中的任一个, 分配的方法有 C_6^2 种, 第二步在剩余的 4 个中任取 2 个分给剩下 2 个小孩中的任一个有 C_4^2 种分法, 第三步把剩下的 2 个分给最后一个小孩有 C_2^2 种分法, 由分步计数原理得不同的分配方法有

$$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \\ = 15 \times 6 \times 1 = 90 (\text{种}).$$

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的恒等变换.

【应试指导】 此题应从 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 去考虑.

$$\because \cos 2\alpha = \frac{5}{13} \quad \alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi),$$

$$\therefore 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{13} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{13},$$

$$\therefore \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2}{3}.$$

13.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数及其增减性.

【应试指导】 A 选项中, $y = \log_3 x^2 \quad x \in (0, +\infty)$ 上是增函数;

B 选项中, $y = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是增函数;

C 选项中, $y = -3^{|x|} \quad x \in (0, +\infty)$ 上是减函数;

D 选项中, $y = \sqrt[3]{x^2} \quad x \in (0, +\infty)$ 上是增函数.

14.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为正切函数的最小正周期.

【应试指导】 由正切函数 $y = \tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ 得

$$y = \tan(2x + \frac{\pi}{4}) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{\pi}{2}.$$

15.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数、对数函数与二次函数的性质.

【应试指导】由对数函数,指数函数,二次函数的图像和性质可知A、C、D所表示的函数在 $(0, +\infty)$ 上都为减函数,故应选B.

16.【答案】A

【考情点拨】本题主要考查的知识点为三角函数的最值.

【应试指导】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,A、B两锐角互余,所以 $\sin^2 A = \cos^2 B = 1 - \sin^2 B$,

$$\sin^2 A + \sin B = 1 - \sin^2 B + \sin B = 1 - (\sin^2 B - \sin B) = \frac{5}{4} - (\sin B - \frac{1}{2})^2,$$

当 $\sin B = \frac{1}{2}$,即 $\angle B = 30^\circ$ 时, $\sin^2 A + \sin B$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$,无最小值.

17.【答案】C

【考情点拨】本题主要考查的知识点为菱形的定义.

【应试指导】由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 可知, $AB \parallel CD \Rightarrow \square ABCD$,又因为AC、BD为 $\square ABCD$ 的对角线,且 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$,所以又知 $AC \perp BD$,则四边形ABCD为菱形.

二、填空题

18.【答案】 $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】要使函数 $y = \sqrt{2-3x+x^2}$ 有意义,只须使

$$2-3x+x^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 1,$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$.

19.【答案】 $\frac{1-a^2}{2}$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 $\because \sin \alpha - \cos \alpha = a$,

$$\therefore (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = a^2,$$

$$\therefore \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = a^2,$$

$$\therefore 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = a^2,$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}.$$

20.【答案】 $5x+2y-4=0$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为直线的斜截式方程.

【应试指导】设所求直线为 l , $\because l$ 与斜率为 $\frac{2}{5}$ 的直线垂直, $\therefore k_l = -\frac{5}{2}$,

又 $\because l$ 在 y 轴上的截距为2,由直线的斜截式得 l 的方程为

$$y = -\frac{5}{2}x + 2, \text{ 即 } 5x + 2y - 4 = 0.$$

21.【答案】 $-\frac{1}{2}$

【考情点拨】本题主要考查的知识点为余弦定理.

【应试指导】在 $\triangle ABC$ 中, $\because AB = 3, BC = 5, AC = 7$,

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}.$$

三、解答题

22.由已知得 $a+c=2b$ 即 $b=\frac{a+c}{2}$,

$$\because \angle A = 2\angle C, \therefore \sin A = \sin 2C,$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore a = \frac{c \cdot \sin 2C}{\sin C} = \frac{2c \cdot \sin C \cos C}{\sin C} = 2c \cdot \cos C,$$

$$\text{由余弦定理得 } a = 2c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= c \cdot \frac{a^2 + \frac{(a+c)^2}{4} - c^2}{a \cdot \frac{a+c}{2}},$$

$$\text{解之得 } a = \frac{3}{2}c, b = \frac{5}{4}c,$$

$$\therefore a:b:c = \frac{3}{2}c:\frac{5}{4}c:c = 6:5:4.$$

23.由已知得 $x=-2$ 为对称轴, $\therefore -\frac{m}{8}=-2, m=-16$,

$$\text{故 } f(x) = 4x^2 + 16x + 5, \therefore f(1) = 25,$$

$$\because \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3, -\infty < -4 < -3 < -2,$$

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上是减函数,

$$\therefore f(-4) > f(-3) = f(\log_{\frac{1}{2}} 8).$$

24.(I)设数列 $\{x_n\}$ 的公差为 d , $\because a > 0$,

$$\text{故 } f(x_n) = a^{x_n-1} \neq 0,$$

当 $n \geq 2$ 时,有

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} &= \frac{a^{x_n-1}}{a^{x_{n-1}-1}} \\ &= a^{x_n-1-x_{n-1}+1} \\ &= a^{x_n-x_{n-1}} = a^d \neq 0. \end{aligned}$$

$\therefore \{f(x_n)\}$ 是以 a^d 为公比的等比数列.

(II) $\because d = x_n - x_{n-1} = 2$,

$\therefore$ 数列 $\{f(x_n)\}$ 的公比为 a^2 ,

$$\because x_1 = 2 \times 1 - 1 = 1, \therefore f(x_1) = f(1) = a^{1-1} = 1,$$

故 $\{f(x_n)\}$ 的首项为1,

$$\therefore S_n = \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}.$$

25.设弹簧原长为 y_0 cm,则弹簧伸长量为 $(y-y_0)$ cm,

由题意得 $y-y_0=kx$,即 $y=kx+y_0$,

$$\text{由已知条件得 } \begin{cases} 12 = 20k + y_0 \\ 15 = 35k + y_0 \end{cases} \text{ 解得 } k = 0.2, y_0 = 8,$$

所求函数关系式为 $y = 0.2x + 8$,弹簧的原长为8cm.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(文史财经类)

全真模拟(六)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $M = \{1, 3\}$, $N = \{0, 2, 4\}$, 则 $\complement_U M \cap N =$ 【 】
A. M B. $\emptyset$ C. U D. N
- 设 x, y 为实数, 则 $|x| = |y|$ 成立的充分必要条件是 【 】
A. $x = -y$ B. $x = y$ C. $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ D. $x^2 = y^2$
- 若 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 且 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) =$ 【 】
A. $\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$
- 已知向量 $a = (3, 4)$, $b = (0, -2)$, 则 $\cos \langle a, b \rangle =$ 【 】
A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{25}$ D. $-\frac{2}{25}$
- 函数 $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ 【 】
A. 是偶函数 B. 既是奇函数, 又是偶函数
C. 是奇函数 D. 既不是奇函数, 又不是偶函数
- 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}) \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4})$ 的最小正周期和最大值分别是 【 】
A. $2\pi, \frac{1}{2}$ B. $2\pi, 2$ C. $4\pi, \frac{1}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}$
- 已知直线 $y = 3x + 1$ 与直线 $x + my + 1 = 0$ 互相垂直, 则 m 的值是 【 】
A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$, 且 $a_2 \cdot a_4 = 8, a_1 \cdot a_7 =$ 【 】
A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

- 函数 $f(x) = 2x^2 - mx + 3$, 当 $x \in [-2, +\infty)$ 时是增函数, 当 $x \in (-\infty, -2]$ 时是减函数, 则 $f(1) =$ 【 】
A. -3 B. 13 C. 7 D. 由 m 而定的常数
- 过点 $A(1, -1), B(-1, 1)$ 且圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上的圆的方程是 【 】
A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ B. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$
C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
- 双曲线的中心在原点且两条渐近线互相垂直, 且双曲线过 $(-2, 0)$ 点, 则双曲线方程是 【 】
A. $x^2 - y^2 = 4$ B. $x^2 - y^2 = 1$
C. $y^2 - x^2 = 4$ D. $y^2 - x^2 = 1$
- 若 $f(x-2) = x^2 - 2x$, 则 $f(x+2) =$ 【 】
A. $x^2 + 2x$ B. $x^2 + 4x + 6$
C. $x^2 + 6x + 8$ D. $x^2 + 4x + 8$
- 函数 $y = x^3 + 3x^2 - 1$ 【 】
A. 没有极大值 B. 没有极小值
C. 极大值为 -1 D. 极小值为 -1
- 随意安排甲、乙、丙 3 人在 3 天节日中值班一天, 那么甲排在乙之前的概率是 【 】
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
- 已知函数 $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + x$ 是奇函数, 则 a 等于 【 】
A. 1 B. 1 或 -1 C. -1 D. 0
- 已知点 $M(-2, 5), N(4, 2)$, 点 P 在 $\overrightarrow{MN}$ 上, 且 $\overrightarrow{MP} : \overrightarrow{PN} = 1 : 2$, 则点 P 的坐标为 【 】
A. $(2, \frac{7}{2})$ B. $(0, 4)$ C. $(8, 2)$ D. $(2, 1)$
- 5 人排成一排, 甲、乙两人必须排在两端的排法有 【 】
A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 8 种

第 II 卷(非选择题,共 65 分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

- 函数 $y = 3\sin \frac{x}{3} + 4\cos \frac{x}{3}$ 的值域是_____, 周期是_____.
- 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\sqrt{1-\sin \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} =$ _____.
- 在自然数 $1, 2, \dots, 100$ 中任取一个数, 能被 3 整除的数的概率是_____.
- 函数 $y = \sqrt{2^x - \frac{1}{2}}$ 的定义域是_____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共4小题,共49分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分12分)

若 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是关于 x 的方程 $mx^2 - (2m-3)x + m-2 = 0$ 的两个实根,求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的取值范围.

23. (本小题满分12分)

某商品每件60元,每周卖出300件,若调整价格,每涨价1元,每周要少卖10件,已知每件商品的成本为40元,如何定价才能使利润最大?

24. (本小题满分12分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点在直线 $3x - 4y - 15 = 0$ 上,且该直线与双曲线的左支交于 M 点,已知 M 与原点间的距离是5,求双曲线的离心率.

25. (本小题满分13分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = -2n^2 - n$.

(I) 求通项 a_n 的表达式;

(II) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{25}$ 的值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 由已知条件及补集、交集的运算知 $\complement_U M = N, N \cap N = N$.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$, 而 $|x| = |y| \Rightarrow x^2 = y^2$, 故选 D.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的两角和公式.

【应试指导】 $\because \cos\theta = -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$,

$$\therefore \sin\theta = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = \sin\theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos\theta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + (-\frac{3}{5}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}.$$

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的夹角公式.

【应试指导】 $\because a = (3, 4), b = (0, -2)$,

$$\therefore |a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, |b| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2,$$

$$a \cdot b = (3, 4) \cdot (0, -2) = 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8,$$

$$\therefore \cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-8}{5 \times 2} = -\frac{4}{5}.$$

5. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 令 $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$,

$$\text{则 } f(-x) = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1}$$

$$= -\log_2 \frac{1+x}{1-x}$$

$$= -f(x),$$

$$\therefore f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} \text{ 为奇函数.}$$

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最小正周期及最值.

$$\text{【应试指导】 } y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, y_{\max} = \frac{1}{2}.$$

7.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两直线垂直的性质.

【应试指导】 易知直线 $y = 3x + 1$ 的斜率为 3, 由 $x + my + 1 = 0$ 中 $m \neq 0$ 得

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{m}, \text{ 其斜率为 } -\frac{1}{m},$$

$$\therefore \text{两直线互相垂直}, \therefore -\frac{1}{m} \cdot 3 = -1, \therefore m = 3.$$

8.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列的性质.

【应试指导】 $\because \{a_n\}$ 是公比为 $q = 2$ 的等比数列且 $a_2 \cdot a_4 = 8$,

$$\text{由通项公式 } a_n = a_1 q^{n-1} \text{ 得 } a_1 q \cdot a_1 q^3 = 8, (a_1 q^2)^2 = 8,$$

$$\therefore a_1 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 q^6 = (a_1 q^2)^2 \cdot q^2 = 8 \times 4 = 32.$$

9.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的对称轴.

【应试指导】 由题意知抛物线的对称轴为 $x = -2$,

$$\therefore -\frac{-m}{2 \times 2} = -2,$$

$$\therefore m = -8,$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 8x + 3,$$

$$\therefore f(1) = 2 \times 1 + 8 \times 1 + 3 = 13.$$

10.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的方程.

【应试指导】 设圆心坐标为 $C(a, b)$, $\because$ 圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上,

$$\therefore a + b - 2 = 0, (1)$$

又 $\because$ 圆上 $A(1, -1), B(-1, 1)$ 两点到圆心的距离都等于圆的半径,

$$\therefore |AC|^2 = |BC|^2,$$

$$\therefore (a-1)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2,$$

整理得 $a = b$, 代入(1)得 $a = b = 1$, 圆的半径 $r = 2$,

$$\therefore \text{圆的方程为 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

11.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的方程.

【应试指导】 $\because$ 双曲线的中心在原点且两条渐近线互相垂直,

$\therefore$ 两渐近线的方程为 $y = \pm x$, 所以 $a = b$, 故双曲线是等轴双曲线,

$\because$ 设双曲线方程为 $x^2 - y^2 = a^2$, 又 $\because$ 双曲线过 $(-2, 0)$ 点, $\therefore a^2 = 4$,

$$\text{双曲线方程为 } x^2 - y^2 = 4.$$

12.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的解析式.

【应试指导】 $\because f(x-2) = x^2 - 2x$,

$$\therefore \text{令 } x-2 = t, \therefore x = t+2,$$

$$\therefore f(t) = (t+2)^2 - 2(t+2) = t^2 + 2t,$$

$$\therefore f(x+2) = (x+2)^2 + 2(x+2) = x^2 + 6x + 8.$$

13.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的极值.

【应试指导】 用导数来求函数的最值.

$$\because y = x^3 + 3x^2 - 1, \therefore y' = 3x^2 + 6x,$$

$$\text{令 } y' = 0 \text{ 得 } 3x^2 + 6x = 0, \therefore x_1 = 0, x_2 = -2,$$

$$\text{当 } x < -2 \text{ 时}, y' = 3x(x+2) > 0,$$

$$\text{当 } -2 < x < 0 \text{ 时}, y' < 0, \therefore \text{函数在 } x = -2 \text{ 处有极大值 } 3.$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时 } y' > 0, \therefore \text{函数在 } x = 0 \text{ 处有极小值 } -1.$$

14.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等可能事件的概率.

【应试指导】 由已知条件可知本题是等可能事件. 三人在 3 天中值班一天的排法共有 $n = P_3^3 = 6$, 甲排在乙前的排法共有 $m = 3$ 种,

$$\therefore \text{甲排在乙之前的概率为 } \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

15.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为奇函数的性质.

【应试指导】 $\because f(x) = (a^2 - 1)x^2 + x$ 是奇函数,

$$\therefore a^2 - 1 = 0, a^2 = 1, a = \pm 1.$$

16.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 由题意得

$$2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ON}$$

$$= \frac{2}{3}(-2, 5) + \frac{1}{3}(4, 2)$$

$$= (0, 4).$$

17.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 由已知条件可知本题属于排列问题. 5 人站成一排, 甲、乙两人必须排在两端, 第一步先排甲、乙两人, 在两端位置上甲、乙两人的排法有 P_2^2 种, 其余 3 人在中间三个位置上共有 P_3^3 种排法, 由分步计数原理得甲、乙两人必须站在两端的排法共有 $P_2^2 \cdot P_3^3 = 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ (种).

二、填空题

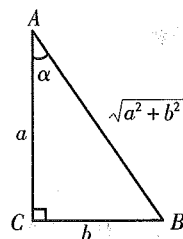
18.【答案】 $[-5, 5], 6\pi$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的值域与周期.

$$\text{【应试指导】 } y = 3\sin \frac{x}{3} + 4\cos \frac{x}{3} = 5\sin\left(\frac{x}{3} + \alpha\right),$$

$$\therefore \text{当 } \sin\left(\frac{x}{3} + \alpha\right) = 1 \text{ 时取最大值, } y_{\max} = 5,$$

当 $\sin\left(\frac{x}{3} + \alpha\right) = -1$ 时取最小值, $y_{\min} = -5$, 故函数值域为 $[-5, 5]$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.



(18 题答案图)

[注] 此题属于 $y = a\sin x + b\cos x$ 类型题,

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha),$$

$$\text{其中 } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

19. [答案] -1

[考情点拨] 本题主要考查的知识点为三角函数的变换.

[应试指导] $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \therefore \cos \frac{\alpha}{2} > \sin \frac{\alpha}{2},$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{\sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\left|\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right|}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{-\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

20. [答案] 0.33

[考情点拨] 本题主要考查的知识点为等可能事件的概率.

[应试指导] 随机试验包含的基本事件总数为 100, 且每个数能被取到的机会均等, 即属于等可能事件, 能被 3 整除的自然数的个数为 33, 故所求概率为 $\frac{33}{100} = 0.33$.

21. [答案] $[-1, +\infty)$

[考情点拨] 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

[应试指导] 要使函数 $y = \sqrt{2^x - \frac{1}{2}}$ 有意义须使 $2^x - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^{-1} \Rightarrow x \geq -1$.

三、解答题

22. 由题意得

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = \frac{2m-3}{m} & (1) \\ \tan \alpha \tan \beta = \frac{m-2}{m} & (2), \end{cases}$$

$$\Delta = (2m-3)^2 - 4m(m-2) \geq 0 \text{ 且 } m \neq 0 \quad (3)$$

由 (1), (2) 得 $\tan(\alpha + \beta) = m - \frac{3}{2},$

由 (3) 得 $m \leq \frac{9}{4}$ 且 $m \neq 0,$

$\therefore \tan(\alpha + \beta)$ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}).$

23. 设涨价 x 元, 利润为 y , 则

$$y = (60 + x)(300 - 10x) - 40(300 - 10x)$$

$$= (20 + x)(300 - 10x) = 6000 + 100x - 10x^2,$$

$$y' = 100 - 20x, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 5,$$

当 $0 < x < 5$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 5$ 时, $y' < 0$,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时 y 取极大值, 并且这个极大值就是最大值,

故每件 65 元时, 利润最大.

24. 由于双曲线的右焦点在直线 $3x - 4y - 15 = 0$ 上, 令 $y = 0$, 得 $x = 5$,

于是双曲线的右焦点为 $(5, 0)$, $\therefore$ 半焦距 $c = 5$, $\therefore a^2 + b^2 = 25,$

设 M 点坐标为 (x_1, y_1) , 则有 $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 25 \\ 3x_1 - 4y_1 = 15 \end{cases}$

$$\text{解之得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{5} \\ y_1 = -\frac{24}{5} \end{cases},$$

$\therefore M$ 点在椭圆上,

$$\therefore \frac{\left(-\frac{7}{5}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(-\frac{24}{5}\right)^2}{b^2} = 1,$$

由 (1), (2) 解得 $a^2 = 1, b^2 = 24$ 或 $a^2 = 49, b^2 = -24$ (舍去),

$\therefore a^2 = 1, b^2 = 24,$

$\therefore a = 1$, 故双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = 5$.

25. (I) 当 $n = 1$ 时, 由 $S_n = -2n^2 - n$ 得 $a_1 = S_1 = -3$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (-2n^2 - n) - [-2(n-1)^2 - (n-1)]$$

$$= 1 - 4n,$$

$\therefore n = 1$ 时, $a_1 = -3$ 也满足上式, 故 $a_n = 1 - 4n$ ($n \geq 1$).

(II) 由于数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = -3$, 公差为 $d = -4$ 的等差数列, 所以 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{25}$ 是首项为 $a_1 = -3$, 公差为 $d = -8$, 项数为 13 的等差数列, 于是由等差数列前 n 项和公式得

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{25} = 13 \times (-3) + \frac{13 \times 12 \times (-8)}{2} = -663.$$