

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x \mid |x-2|<2\}$, $N=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, 则 $M \cap N = ()$

A. $\{2\}$

B. $\{0, 1, 2\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

正确答案: C

解析: 解得 $M=\{|x-2|<2\}=\{x \mid -2<x-2<2\}=\{x \mid 0<x<4\}$, 故 $M \cap N=\{1, 2, 3\}$ 。

2. 设函数 $f(x+1)=2x+2$, 则 $f(x) = ()$

A. $2x-1$

B. $2x$

C. $2x+1$

D. $2x+2$

正确答案: B

解析: $f(x+1)=2x+2=2(x+1)$, 令 $t=x+1$, 故 $f(t)=2t$, 把 t 换成 x , 因此 $f(x)=2x$ 。

3. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ 的定义域是 $()$

A. $\{x \mid -3 \leq x \leq -1\}$

B. $\{x \mid x \leq -3 \text{ 或 } x \geq -1\}$

C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$

D. $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$

正确答案: D

解析: 由题可知 $x^2-4x+3 \geq 0$, 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq 1$, 故函数的定义域为 $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ 。

4. 下列函数中, 为奇函数的是 $()$

A. $y=\cos 2x$

B. $y=\sin x$

C. $y=2-x$

D. $y=x+1$

正确答案: B

解析: 当 $f(-x)=-f(x)$ 时, 函数 $f(x)$ 是奇函数。四个选项中只有选项 B 符合, 故选 B 选项。

5. 下列函数中, 为减函数的是 $()$

A. $y = \cos x$

B. $y = 3x$

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

D. $y = 3x^2 - 1$

正确答案：C

解析：由对数函数的性质可知，当底数大于。小于 1 时，在定义域内，对数函数为减函数，故选 c 选项。

6. 函数 $y = x^2 + 1$ ($x > 0$) 的图像在 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

正确答案：A

解析：当 $x > 0$ 时，函数 $y = x^2 + 1 > 0$ ，因此函数的图像在第一象限。

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin \alpha =$ ()

7. 设 α 是三角形的一个内角，若

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

正确答案：D

解析：

由题知 $0 < \alpha < \pi$, 而 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, 故 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 因此 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 如果点 (2, -4) 在一个反比例函数的图像上，那么下列四个点中也在该图像上的是 ()

A. (-2, 4)

B. (-4, -2)

C. (-2, -4)

D. (2, 4)

正确答案：A

解析：

设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$ ，点 $(2, -4)$ 在反比例函数的图像上，因此有 $-4 = \frac{k}{2}$ ，解得 $k = -8$ ，故反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ ，当 $x = -2$ 时， $y = 4$ ，故选项 A 在该图像上。

9. 已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{24}{25}$

B. $-\frac{7}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

正确答案：D

解析：

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$ 两边平方得 $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{25} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{25}$ ，故 $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ 。

10. 设甲： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ；乙： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。则 ()

A. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

正确答案：A

解析：三角形相似不一定全等，但三角形全等一定相似，因此，甲是乙的必要条件但不是充分条件。

11. 已知向量 i, j 为互相垂直的单位向量，向量 $a = 2i + mj$ ，若 $|a| = 2$ ，则 $m =$ ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

正确答案：C

解析：

由题可知 $a = (2, m)$ ，因此 $|a| = \sqrt{2^2 + m^2} = 2$ ，故 $m = 0$ 。

12.用 1, 2, 3, 4 组成没有重复数字的三位数, 其中偶数共有 ()

- A.24 个
- B.12 个
- C.6 个
- D.3 个

正确答案: B

解析: 若三位数为偶数, 个位数只能从 2, 4 中选一个, 故没有重复数字的偶数三位数为

$$A_3^2 \cdot C_2^1 = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ 个}$$

13.中心在坐标原点, 对称轴为坐标轴, 且一个顶点为 (3, 0), 虚轴长为 8 的双曲线的方程是 ()

A. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$

正确答案: B

解析: 双曲线有一个顶点为 (3, 0), 因此所求双曲线的实轴在 x 轴上, 可排除 A、C 选项,

又由于虚轴长为 8, 故 b=4, 即 b²=16, 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

14.函数 y=4x 的图像与直线 y=4 的交点坐标为 ()

- A. (0, 4)
- B. (4, 64)
- C. (1, 4)
- D. (4, 16)

正确答案: C

解析: 令 y=4x=4, 解得 x=1, 故所求交点为 (1, 4)。

15.已知直线 l: 3x-2y-5=0, 圆 C: (x-1)²+(y+1)²=4, 则 C 上到 l 的距离为 1 的点共有 ()

- A.1 个
- B.2 个
- C.3 个
- D.4 个

正确答案: D

解析: 由题可知圆的圆心为 (1, -1), 半径为 2, 圆心到直线的距离为

$$\frac{|3 \times 1 - 2 \times (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 0。$$

即直线过圆心，因此圆 C 上到直线的距离为 1 的点共有 4 个。

16. 对于函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，有下列两个命题：

① 如果 $c=0$ ，那么 $y=f(x)$ 的图像经过坐标原点。

② 如果 $a<0$ ，那么 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有公共点。

则 ()

A. ①② 都为真命题

B. ① 为真命题，② 为假命题

C. ① 为假命题，② 为真命题

D. ①② 都为假命题

正确答案：B

解析：若 $c=0$ ，则函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 过坐标原点，故①为真命题；若 $a<0$ ，而 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像开口向下，与 x 轴没有交点，故②为假命题，因此选 B 选项。

17. 袋中有 6 个球，其中 4 个红球，2 个白球，从中随机取出 2 个球，则这 2 个球都为红球的概率为 ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{8}{15}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{15}$

正确答案：C

解析：两个球都是红球的概率为

$$\frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{2}{5}。$$

二、填空题

1. 点 (4, 5) 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标为_____。

答案：(5, 4)

解析：点 (4, 5) 关于直线 $y=x$ 的对称点为 (5, 4)。

$$2. \log_2 3 + \log_2 \frac{5}{3} - \log_2 \frac{5}{8} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案：3

解析：

$$\log_2 3 + \log_2 \frac{5}{3} - \log_2 \frac{5}{8} = \log_2 \left(3 \times \frac{5}{3} \div \frac{5}{8} \right) = \log_2 8 = 3.$$

3.某校学生参加一次科技知识竞赛，抽取了其中 8 位同学的分数作为样本，数据如下：

90，90，75，70，80，75，85，75。

则该样本的平均数为_____。

答案：80

解析：样本平均数为 $(90+90+75+70+80+75+85+75)/8=80$ 。

4.设函数 $f(x) = x \sin x$ ，则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $\sin x + x \cos x$

解析： $f'(x) = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ 。

三、解答题

1.在 $\triangle ABC$ 中， $B=120^\circ$ ， $C=30^\circ$ ， $BC=4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

解析：因为 $A=180^\circ - B - C=30^\circ$ ，所以 $AB=BC=4$ 。

$$\text{因此 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}.$$

2.已知 a ， b ， c 成等差数列， a ， b ， $c+1$ 成等比数列。若 $b=6$ ，求 a 和 c 。

解析：

$$\text{由已知得} \begin{cases} a + c = 12, \\ a(c + 1) = 36. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 4, \\ c = 8, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 9, \\ c = 3. \end{cases}$$

3.已知直线 l 的斜率为 1， l 过抛物线 $C: x^2 = \frac{1}{2}y$ 的焦点，且与 C 交于 A ， B 两点。

(I) 求 l 与 C 的准线的交点坐标;

(II) 求 $|AB|$ 。

解析:

(I)

C 的焦点为 $(0, \frac{1}{8})$, 准线为 $y = -\frac{1}{8}$.

由题意得 l 的方程为 $y = x + \frac{1}{8}$.

因此 l 与 C 的准线的交点坐标为 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$.

(II)

由 $\begin{cases} y = x + \frac{1}{8}, \\ y = 2x^2, \end{cases}$ 得 $2x^2 - x - \frac{1}{8} = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, y_1 + y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

因此 $|AB| = y_1 + y_2 + \frac{1}{4} = 1$.

4. 设函数 $f(x) = x^3 - 4x$ 。

(I) 求 $f'(2)$;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 的最大值与最小值。

解析:

(I) 因为 $f'(x) = 3x^2 - 4$, 所以 $f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 = 8$ 。

(II)

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 $x_1 < -1, f(-1) = 3, f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}, f(2) = 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 的最大值为 3, 最小值为 $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$.