

高等数学(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷 (选择题, 共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} =$ 【 】
 A. e^{-2} B. e^{-1}
 C. e D. e^2
 2. 设 $y = e^{-5x}$, 则 $dy =$ 【 】
 A. $-5e^{-5x} dx$ B. $-e^{-5x} dx$
 C. $e^{-5x} dx$ D. $5e^{-5x} dx$
 3. 设函数 $f(x) = x \sin x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) =$ 【 】
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1
 C. $\frac{\pi}{2}$ D. 2π
 4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, $f'(x) > 0$. 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 【 】
 A. 不存在零点 B. 存在唯一零点
 C. 存在极大值点 D. 存在极小值点
 5. $\int x^2 e^{x^3} dx =$ 【 】
 A. $\frac{1}{3} x^2 e^{x^3} + C$ B. $3x^2 e^{x^3} + C$
 C. $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$ D. $3e^{x^3} + C$

6. $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx =$ []

- A. -2
C. 1
- B. -1
D. 2

7. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$ 【 】

- A. $-e$
B. $-e^{-1}$
C. e^{-1}
D. e

8. 设二元函数 $z = x^2y + x\sin y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

- A. $2xy + \sin y$
 B. $x^2 + x \cos y$
 C. $2xy + x \sin y$
 D. $x^2 y + \sin y$

9. 设二元函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$ 【 】

- A. 1
B. 2
C. $x^2 + y^2$
D. $\frac{1}{x^2 + y^2}$

10. 设球面方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$, 则该球的球心坐标与半径分别为 【 】

- A. $(-1, 2, -3); 2$ B. $(-1, 2, -3); 4$
C. $(1, -2, 3); 2$ D. $(1, -2, 3); 4$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3$, 则 $a =$ _____.
12. 曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的铅直渐近线方程为 _____.
13. 设 $y = \frac{x}{1+x}$, 则 $y' =$ _____.
14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.
15. 曲线 $y = x + \cos x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率 $k =$ _____.
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx =$ _____.
17. 设函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 则 $f'(0) =$ _____.
18. 设二元函数 $z = x^2 + 2xy$, 则 $dz =$ _____.

19. 过原点(0,0,0) 且垂直于向量(1,1,1) 的平面方程为_____.

20. 微分方程 $y' - 2xy = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

设 $y = y(x)$ 满足 $2y + \sin(x + y) = 0$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极大值.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x - 1)$, 求 $f'(1)$.

26. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D (x + 1) dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 1$ 围成的平面有界区域.

密 封 线 内 不 要 答 题

27. (本题满分 10 分)

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$ 的收敛性.

28. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = e^x$ 的通解.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了特殊极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y = e^{-5x}$, 所以 $dy = -5e^{-5x} dx$.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 因为 $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了零点定理的知识点.

【应试指导】 由题意知, $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内存在唯一零点.

5. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了第一类换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$.

6. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的奇偶性的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx = 3 \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 \sin^5 x dx$. 因为 $f_1(x) = x^2$ 为偶函数, 所以 $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$.

因为 $f_2(x) = \sin^5 x$ 为奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 \sin^5 x dx = 0$. 故 $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx = \frac{2}{3} \times 3 = 2$.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a e^{-x} dx$
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_1^a$
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-a}) = e^{-1}$.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因为 $z = x^2 y + x \sin y$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \sin y$.

9. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的应用的知识点.

【应试指导】 因为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 故 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了球的球心坐标与半径的知识点.

【应试指导】 $(x-1)^2 + [y-(-2)]^2 + (z-3)^2 = 2^2$, 所以, 该球的球心坐标与半径分别为 $(1, -2, 3), 2$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = \frac{2}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{a} = 3$, 则 $a = \frac{2}{3}$.

12.【答案】 $x = -\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow -\frac{1}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x+1} = \infty$, 则 $x = -\frac{1}{2}$ 是 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的铅直渐近线.

13.【答案】 $\frac{1}{(1+x)^2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = \frac{x}{1+x}$, 所以 $y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.

14.【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a = f(0) = 3$.

15.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 因为 $y = x + \cos x$, 所以 $y' = 1 - \sin x$, $y'(0) = 1$, 即所求的斜率 $k = 1$.

16.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了第一类换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

17.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了变上限的定积分的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 所以 $f'(x) = e^{x^2}$, $f'(0) = 1$.

18.【答案】 $2(x+y)dx + 2xdy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因为 $z = x^2 + 2xy$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$, 则 $dz = 2(x+y)dx + 2xdy$.

19.【答案】 $x+y+z=0$

【考情点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 由题意知, 平面的法向量为 $(1, 1, 1)$, 则平面方程可设为 $x+y+z+D=0$, 因该平面过 $(0, 0, 0)$ 点, 所以 $D=0$, 即 $x+y+z=0$.

20.【答案】 Ce^{x^2}

【考情点拨】 本题考查了一阶微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 $y' - 2xy = 0$, 即 $\frac{dy}{y} = 2xdx$, 两边积分得 $\ln y = x^2 + C_1$, 即 $y = Ce^{x^2}$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

22. 将 $2y + \sin(x+y) = 0$ 两边对 x 求导, 得

$$2y' + \cos(x+y) \cdot (1+y') = 0.$$

$$\text{解得 } y' = -\frac{\cos(x+y)}{2 + \cos(x+y)}.$$

23. 因为 $f'(x) = 3x^2 - 3$,

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1$.

又 $f''(x) = 6x$,

$$f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0.$$

所以 $x_1 = -1$ 为 $f(x)$ 的极大值点,

$f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = 2$.

$$\begin{aligned} 24. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x + 1) \\ &= \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

25. 因为 $f'(x) = x - \sin(x-1)$,

所以 $f'(1) = 1$.

$$\begin{aligned} 26. \iint_D (x+1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1) dy \\ &= \int_0^1 (1+x)(1-x) dx \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

27. 因为 $u_n = \frac{5n+1}{5^n} > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1} = \frac{1}{5} < 1,$$

所以原级数收敛.

28. $y'' + 3y' + 2y = e^x$ 对应的齐次方程为

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$,

特征根为 $r_1 = -2, r_2 = -1$.

所以齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

设 $y^* = Ae^x$ 为原方程的一个特解,

代入原方程可得

$$A = \frac{1}{6}.$$

所以原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^x.$$