

绝密★启用前

2015 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷(选择题, 共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

- 设 $b \neq 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin bx$ 是 x^2 的 【 】
A. 高阶无穷小量 B. 等价无穷小量
C. 同阶但不等价无穷小量 D. 低阶无穷小量
- 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)} = 2$, 则 $f'(1) =$ 【 】
A. 2 B. 1
C. $\frac{1}{2}$ D. 0
- 函数 $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 的单调减区间为 【 】
A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$
C. $(-2, 2)$ D. $(2, +\infty)$
- 设 $f'(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$ 【 】
A. 为 $f(x)$ 的驻点 B. 不为 $f(x)$ 的驻点
C. 为 $f(x)$ 的极大值点 D. 为 $f(x)$ 的极小值点
- 下列函数中为 $f(x) = e^{2x}$ 的原函数的是 【 】
A. e^x B. $\frac{1}{2}e^{2x}$
C. e^{2x} D. $2e^{2x}$

6. $\int x \cos x^2 dx =$ 【 】

A. $-2\sin x^2 + C$ B. $-\frac{1}{2}\sin x^2 + C$

C. $2\sin x^2 + C$ D. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$

7. $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt =$ 【 】

A. $x e^{x^2}$ B. $-x e^{x^2}$

C. $x e^{-x^2}$ D. $-x e^{-x^2}$

8. 设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

A. $y x^{y-1}$ B. $x^y \ln x$

C. x^{y-1} D. $x^{y-1} \ln x$

9. 设 $z = x^2 + y^3$, 则 $dz \Big|_{(1,1)} =$ 【 】

A. $3dx + 2dy$ B. $2dx + 3dy$

C. $2dx + dy$ D. $dx + 3dy$

10. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ (k 为非零常数) 【 】

A. 绝对收敛 B. 条件收敛

C. 发散 D. 收敛性与 k 的取值有关

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} =$.

12. 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 的间断点为 $x =$.

13. 设 $y = x^2 + e^x$, 则 $dy =$.

14. 设 $y = (2+x)^{100}$, 则 $y' =$.

15. $\int \frac{dx}{3-x} =$.

16. $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$.

17. $\int_0^1 e^{3x} dx =$ _____.

18. 设 $z = y^2 \sin x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

19. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解为 $y =$ _____.

20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

22. (本题满分 8 分)

设曲线方程为 $y = e^x + x$, 求 $y' \Big|_{x=0}$ 以及该曲线在点 $(0, 1)$ 处的法线方程.

23. (本题满分 8 分)

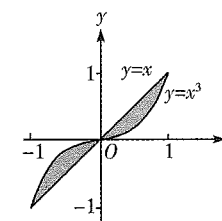
计算 $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

求曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围图形(如图中阴影部分所示)的面积 S .



26. (本题满分 10 分)

设二元函数 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$, 求 z 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 1$ 及 x 轴围成的有界区域.

参考答案及解析

一、选择题

- 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的比较的知识点.

【应试指导】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 故 $\sin bx$ 是比 x^2 低阶的无穷小量, 即 $\sin bx$ 是 x^2 的低阶无穷小量.
- 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了导数的定义的知识点.

【应试指导】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)}} = \frac{1}{2}$.
- 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = 2$. 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2, 2)$.
- 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了驻点的知识点.

【应试指导】 使得函数的一阶导数的值为零的点, 称为函数的驻点, 即 $f'(x) = 0$ 的根称为驻点. 驻点不一定是极值点.
- 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了原函数的知识点.

【应试指导】 $\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ (C 为任意常数), 只有 B 项是 $f(x) = e^{2x}$ 的一个原函数.
- 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$ (C 为任意常数).
- 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt = - \frac{d}{dx} \int_0^x t e^{t^2} dt = - x e^{x^2}$.
- 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$.
- 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$, 则 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx + 3y^2 dy$, 故 $dz \Big|_{(1,1)} = 2dx + 3dy$.
- 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数的收敛性的知识点.

【应试指导】 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n = (-1)^n \frac{k}{n^2} \rightarrow 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{k}{n^2} \right| = |k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 显然级数 $|k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ 绝对收敛.

二、填空题

11.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$

12.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义,故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点.

13.【答案】 $(2x + e^x)dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $y' = 2x + e^x$,故 $dy = (2x + e^x)dx$.

14.【答案】 $100(2+x)^{99}$

【考情点拨】 本题考查了基本初等函数的导数公式的知识点.

【应试指导】 $y = (2+x)^{100}$,则 $y' = 100(2+x)^{100-1} = 100(2+x)^{99}.$

15.【答案】 $-\ln|3-x|+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{dx}{3-x} = -\int \frac{1}{x-3} d(x-3) = -\ln|x-3|+C(C \text{ 为任意常数}).$

16.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上为连续奇函数,故 $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$

17.【答案】 $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$

18.【答案】 $y^2 \cos x$

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因为 $z = y^2 \sin x$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x.$

19.【答案】 $x^2 + C$

【考情点拨】 本题考查了微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 所给方程为可分离变量的微分方程,分离变量得 $dy = 2xdx$,两边同时积分可得 $y = x^2 + C$,即该微分方程的通解为 $y = x^2 + C.$

20.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$,故收敛半径 $R = 1.$

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x}$
 $= \frac{1}{2}.$

22. $y' = e^x + 1,$

$$y' \Big|_{x=0} = 2.$$

曲线在点 $(0,1)$ 处的法线方程为

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-0),$$

即 $x+2y-2=0.$

23. 设 $\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2, dx = 2tdt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2tdt \\ &= 2 \int e^{-t} dt \\ &= -2e^{-t} + C \\ &= -2e^{-\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^e \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

25. 由对称性知

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 (x-x^3) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$26. \frac{\partial z}{\partial x} = 2x+y+1, \frac{\partial z}{\partial y} = x+2y-1.$$

$$\text{由} \begin{cases} 2x+y+1=0, \\ x+2y-1=0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 1, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 2.$$

$$B^2 - AC = -3 < 0, A > 0,$$

因此点 $(-1,1)$ 为 z 的极小值点,极小值为 $-6.$

$$\begin{aligned} 27. y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int x^2 dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$