

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{2x} = (\quad)$

A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

答案：C

2. 设函数 $y=2x+\sin x$ ，则 $y'=(\quad)$

A. $1-\cos x$

B. $1+\cos x$

C. $2-\cos x$

D. $2+\cos x$

答案：D

3. 设函数 $y=e^{x-2}$ ，则 $dy=(\quad)$

A. $e^{x-3}dx$

B. $e^{x-2}dx$

C. $e^{x-1}dx$

D. $e^x dx$

答案：B

4. 设函数 $y=(2+x)^3$ ，则 $y'=(\quad)$

A. $(2+x)^2$

B. $3(2+x)^2$

C. $(2+x)^4$

D. $3(2+x)^4$

答案：B

5. 设函数 $y=3x+1$ ，则 $y''=(\quad)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案：A

6. $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt = (\quad)$

A. e^x

B. $e^x - 1$

C. e^{x-1}

D. e^{x+1}

答案：A

7. $\int x dx = (\quad)$

A. $2x^2+C$

B. x^2+C

C. $\frac{1}{2}x^2+C$

D. $x+C$

答案：C

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = (\quad)$

A. 1/2

B. 1

C. 2

D. 3

答案：C

9. 设函数 $z=3x^2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

- A. $6y$
B. $6xy$
C. $3x$
D. $3x^2$

答案: D

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径为 ()

- A. 0
B. 1
C. 2
D. $+\infty$

答案: B

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分. 共 40 分. 把答案填在题中横线上.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

答案: e

12. 设函数 $y=x^3$, 则 $y' =$ _____.

答案: $3x^2$

13. 设函数 $y=(x-3)^4$, 则 $dy =$ _____.

答案: $4(x-3)^3 dx$

14. 设函数 $y=\sin(x-2)$, 则 $y'' =$ _____.

答案: $-\sin(x-2)$

15. $\int \frac{1}{2x} dx =$ _____.

答案: $\frac{1}{2} \ln|x| + C$

16. $\int_{-1}^1 x^7 dx =$ _____.

答案: 0

17. 过坐标原点且与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ 垂直的平面方程为 _____.

答案: $3x+2y-2z=0$

18. 设函数 $z=3x+y^2$, 则 $dz =$ _____.

答案: $3dx+2ydy$

19. 微分方程 $y'=3x^2$ 的通解为 $y =$ _____.

答案: x^3+C

20. 设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D 2xdxdy =$ _____.

答案: 2

三、解答题: 21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ a & (x = 0) \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

解: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

可得 $a=1$.

22. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sin x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\cos x}$
 $= -1$.

23. (本题满分 8 分)

求曲线 $y=x^3-3x+5$ 的拐点.

解: $y' = 3x^2 - 3, y'' = 6x$.

令 $y'' = 0$, 解得 $x=0$.

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$,

当 $x=0$ 时, $y=5$.

因此, 点 $(0, 5)$ 为所给曲线的拐点.

24. (本题满分 8 分)

求 $\int (x - e^x) dx$.

解: $\int (x - e^x) dx = \frac{x^2}{2} - e^x + C$.

25. (本题满分 8 分)

设函数 $z = x^2 \sin y + ye^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + ye^x$.

26. (本题满分 10 分)

设 D 为曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的有界平面图形, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

解: 由 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=x \end{cases}$ 可解得两曲线的交点为 $(0, 0), (1, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{旋转体的体积 } V &= \int_0^1 \pi [x^2 - (x^2)^2] dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

27. (本题满分 10 分)

求 $\iint_D (x^3 + y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 所围成的有界平面区域.

解: 由于积分区域 D 关于 y 轴对称, 因此

$$\iint_D x^3 dx dy = 0.$$

记 D_1 为区域 D 在第一象限的部分, 则

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= 2 \iint_{D_1} y dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y dy \\ &= \int_0^1 (1 - x^4) dx \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D (x^3 + y) dx dy = \frac{4}{5}.$$

28. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - y' - 2y = e^x$ 的通解.

解: 对应齐次微分方程的特征方程为

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 2$.

齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^* = A e^x$, 代入原方程可得

$$A = -\frac{1}{2}, \text{ 因此 } y^* = -\frac{1}{2} e^x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$