



绝密★启用前

2017 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 | 统分人签字 |
|----|---|---|---|----|-------|
| 分数 |   |   |   |    |       |

### 第 I 卷(选择题,共 40 分)

| 得分 | 评卷人 |
|----|-----|
|    |     |

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,下列变量是无穷小量的为 【    】
- A.  $\frac{1}{x^2}$  B.  $2^x$
- C.  $\sin x$  D.  $\ln(x+e)$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$  【    】
- A.  $e$  B.  $e^{-1}$
- C.  $e^2$  D.  $e^{-2}$
3. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续,则常数  $a =$  【    】
- A. 0 B.  $\frac{1}{2}$
- C. 1 D. 2
4. 设函数  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f'(e) =$  【    】
- A. -1 B. 0
- C. 1 D. 2
5. 函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的极小值为 【    】
- A. -2 B. 0
- C. 2 D. 4



16.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

17. 已知曲线  $y = x^2 + x - 2$  的切线  $l$  斜率为 3, 则  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

18. 设二元函数  $z = \ln(x^2 + y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_.

19. 设  $f(x)$  为连续函数, 则  $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' =$  \_\_\_\_\_.

20. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_.

| 得 分 | 评卷人 |
|-----|-----|
|     |     |

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$ .

22. (本题满分 8 分)

设  $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = 1 + t^3, \end{cases}$  求  $\frac{dy}{dx}$ .

23. (本题满分 8 分)

已知  $\sin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求  $\int x f'(x) dx$ .

24. (本题满分 8 分)

计算  $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ .

25. (本题满分 8 分)

设二元函数  $z = x^2 y^2 + x - y + 1$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

26. (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

27. (本题满分 10 分)

求微分方程  $y \frac{dy}{dx} = x^2$  的通解.

28. (本题满分 10 分)

用铁皮做一个容积为  $V$  的圆柱形有盖桶, 证明当圆柱的高等于底面直径时, 所使用的铁皮面积最小.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

#### 1.【答案】C

【考点点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$ .

#### 2.【答案】C

【考点点拨】 本题考查了  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$ .

#### 3.【答案】B

【考点点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 因为函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}e^{-x} = a = f(0) = \frac{1}{2}$ .

#### 4.【答案】D

【考点点拨】 本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 因为  $f'(x) = \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$ , 所以  $f'(e) = \ln e + 1 = 2$ .

#### 5.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了极小值的知识点.

【应试指导】 因为  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1, x_2 = 1$ . 又  $f''(x) = 6x, f''(-1) = -6 < 0$ ,  $f''(1) = 6 > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $x_2 = 1$  处取得极小值, 且极小值  $f(1) = 1 - 3 = -2$ .

#### 6.【答案】D

【考点点拨】 本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】 可得原方程化为  $x^2 + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{3} = 1$ , 所以原方程表示的是椭球面.

#### 7.【答案】C

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】  $\int_0^1 (2x+k)dx = \left(x^2+kx\right)\Big|_0^1 = 1+k=1$ , 所以  $k=0$ .

#### 8.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了定积分性质的知识点.

【应试指导】 若在区间  $[a, b]$  上  $f(x) > 0$ , 则定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值为由曲线  $y=f(x)$ , 直线  $x=a, x=b, y=0$  所围成图形的面积, 所以  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

#### 9.【答案】A

【考点点拨】 本题考查了直线方程的方向向量的知识点.

【应试指导】 因为直线方程为  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ , 所以其方向向量为  $(3, -1, 2)$ .

#### 10.【答案】B

【考点点拨】 本题考查了级数的收敛性的知识点.

【应试指导】  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n = (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^2}$ , 因为  $\frac{1}{n+a^2} \leq$

$\frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+a^2} \right|$  发散. 由莱布尼茨判别法知,  $v_n = \frac{1}{n+a^2} > v_{n+1} = \frac{1}{n+1+a^2}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$  收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$  条件收敛.

## 二、填空题

11. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}} = 1$ .

12. 【答案】  $y = \frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了水平渐近线方程的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ , 所求曲线的水平渐近线方程为  $y = \frac{1}{2}$ .

13. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ .

14. 【答案】  $1 + \frac{1}{x^2}$

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的性质的知识点.

【应试指导】 因为  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$ .

15. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数的定积分的知识点.

【应试指导】  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$ .

16. 【答案】  $\frac{\pi}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

17. 【答案】  $3x - y - 3 = 0$

【考情点拨】 本题考查了切线的知识点.

【应试指导】 曲线上某一点的切线斜率为  $k = y' = 2x + 1$ , 因为该切线的斜率为 3, 即  $k = 2x + 1 = 3$ ,  $x = 1$ ,  $y \Big|_{x=1} = 0$ , 即切线过点  $(1, 0)$ , 所求切线为  $y = 3(x - 1)$ , 即  $3x - y - 3 = 0$ .

18. 【答案】  $\frac{2x}{x^2+y}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数偏导数的知识点.

【应试指导】  $z = \ln(x^2 + y)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2)'}{x^2 + y} = \frac{2x}{x^2 + y}$ .

19. 【答案】  $f(x)$

【考情点拨】 本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】  $\left( \int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$ .

20. 【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$ , 故幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$  的收敛半径为  $R = \frac{1}{\rho} = 3$ .

### 三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{3t^2}{2t} \\ &= \frac{3}{2}t. \end{aligned}$$

23. 因为  $\sin x$  是  $f(x)$  的一个原函数, 所以

$$\begin{aligned} \int x f'(x) dx &= x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x f(x) - \sin x + C. \end{aligned}$$

24. 设  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ ,  $0 \leq t \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt \\ &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2 \left[ t - \ln(1+t) \right]_0^2 \\ &= 2 \times (2 - \ln 3) \\ &= 4 - 2\ln 3. \end{aligned}$$

25. 因为  $z = x^2 y^2 + x - y + 1$ , 所以

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

26.  $D$  可表示为  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

$$27. y \frac{dy}{dx} = x^2,$$

$$y dy = x^2 dx,$$

$$\text{两边同时积分, } \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C_1,$$

$$3y^2 = 2x^3 + C_1,$$

$$\text{即 } y^2 = \frac{2}{3} x^3 + C.$$

28. 设圆柱形的底面半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $V = \pi r^2 h$ .

$$\text{所用铁皮面积 } S = 2\pi r^2 + 2\pi rh,$$

$$\text{令 } \frac{dS}{dr} = 4\pi r - 2\pi h = 0,$$

$$2r = h,$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = 4\pi > 0.$$

于是由实际问题得,  $S$  存在最小值, 即当圆柱的高等于底面直径时, 所使用的铁皮面积最小.