

高等数学(一)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷 (选择题, 共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} =$

【 】

A. e

B. 2

C. 1

D. 0

2. 若 $y = 1 + \cos x$, 则 $dy =$

【 】

A. $(1 + \sin x)dx$

B. $(1 - \sin x)dx$

C. $\sin x dx$

D. $-\sin x dx$

3. 若函数 $f(x) = 5^x$, 则 $f'(x) =$

【 】

A. 5^{x-1}

B. $x5^{x-1}$

C. $5^x \ln 5$

D. 5^x

4. $\int \frac{1}{2-x} dx =$

【 】

A. $\ln |2-x| + C$

B. $-\ln |2-x| + C$

C. $-\frac{1}{(2-x)^2} + C$

D. $\frac{1}{(2-x)^2} + C$

5. $\int f'(2x) dx =$

【 】

A. $\frac{1}{2}f(2x) + C$

B. $f(2x) + C$

C. $2f(2x) + C$

D. $\frac{1}{2}f(x) + C$

6. 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

A. 0

B. 2

C. $2f(-1)$

D. $2f(1)$

7. 若二元函数 $z = x^2y + 3x + 2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. $2xy + 3 + 2y$

B. $xy + 3 + 2y$

C. $2xy + 3$

D. $xy + 3$

8. 方程 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 表示的二次曲面是

A. 柱面

B. 球面

C. 旋转抛物面

D. 椭球面

9. 已知区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x dx dy =$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

10. 微分方程 $yy' = 1$ 的通解为

A. $y^2 = x + C$

B. $\frac{1}{2}y^2 = x + C$

C. $y^2 = Cx$

D. $2y^2 = x + C$

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题 (11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点为_____.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) =$ _____.

14. 若 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

15. $\int (2x + 3) dx =$ _____.

16. $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx =$ _____.

17. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx =$ _____.

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} =$ _____.

19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ _____.

20. 若二元函数 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sin x}{x}, & x < 0, \\ 3x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a .

22. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$.

23. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$, 求 $f''(0)$.

24. (本题满分 8 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}.$$

25. (本题满分 8 分)

求 $\int x \cos x dx$.

高等数学(一)

26. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = 2\ln x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】本题考查了极限的运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

2.【答案】D

【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (1 + \cos x)' = -\sin x,$
故 $dy = -\sin x dx.$

3.【答案】C

【考情点拨】本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (5^x)' = 5^x \ln 5.$

4.【答案】B

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln |2-x| + C.$

5.【答案】A

【考情点拨】本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】 $\int f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) =$
 $\frac{1}{2} f(2x) + C.$

6.【答案】A

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】因为 $f(x)$ 是连续的奇函数, 故
 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$

7.【答案】C

【考情点拨】本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y + 3x + 2y,$ 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3.$

8.【答案】C

【考情点拨】本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】 $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 可化为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = z,$
故表示的是旋转抛物面.

9.【答案】A

【考情点拨】本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 $\iint_D x dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^1 dy = 2 \int_{-1}^1 x dx = 0.$

10.【答案】B

【考情点拨】本题考查了微分方程的通解的知识点.

【应试指导】原方程分离变量得 $y dy = dx,$ 两边
同时积分得 $\frac{1}{2} y^2 = x + C,$ 故方程的通解
为 $\frac{1}{2} y^2 = x + C.$

二、填空题

11.【答案】(2, -6)

【考情点拨】本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 12x + 3, y'' = 6x - 12,$ 令 $y'' =$
 $0,$ 则 $x = 2, y = -6,$ 故拐点为 (2, -6).

12.【答案】 e^{-3}

【考情点拨】本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} =$
 $e^{-3}.$

13.【答案】 $\frac{x^2}{1+x^2}$

【考情点拨】本题考查了导数的求导公式的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x - \arctan x,$ 则 $f'(x) = 1 -$
 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$

14.【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x},$ 则 $dy = 2e^{2x} dx.$

15.【答案】 $x^2 + 3x + C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C.$

16.【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \left(\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1$
 $= \frac{2}{3}.$

17.【答案】2

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) =$
 $-2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 2.$

18.【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】本题考查了幂级数求和的知识点.

【应试指导】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{3}{2}.$$

19. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了无穷积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$

20. 【答案】 $4xy$

【考情点拨】 本题考查了高阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y^2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a,$$

$$\text{且 } f(0) = a,$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

$$\therefore a = 3.$$

$$\begin{aligned} 22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$23. f'(x) = 2 + \frac{3}{3x + 2},$$

$$f''(x) = -\frac{9}{(3x + 2)^2},$$

$$\text{故 } f''(0) = -\frac{9}{4}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} \cos 3t \Big|_0^x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1 - \cos 3x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2} x^2}{x^2}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} 25. \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

26. $f'(x) = x^2 - x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = 1$,
当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 为单调增加函数.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 为单调减少函数.

故当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值 $f(0) = 5$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取极小值, 极小值 $f(1) = \frac{29}{6}$.

27. 这是个一阶线性非齐次微分方程.

$$P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = 2 \ln x,$$

$$\text{故通解为 } y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 2 \ln x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= x \cdot \left(2 \int \frac{\ln x}{x} dx + C \right)$$

$$= x[(\ln x)^2 + C].$$

28. D 在极坐标系里可表示为 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 3$,

$$\text{故 } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^2 \cdot r dr$$

$$= \frac{81}{4} \pi.$$