



绝密★启用前

2019 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷(选择题, 共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x + x^2 + x^3 + x^4$ 为 x 的 【 】
 - 等价无穷小
 - 2 阶无穷小
 - 3 阶无穷小
 - 4 阶无穷小
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ 【 】
 - $-e^2$
 - $-e$
 - e
 - e^2
- 设函数 $y = \cos 2x$, 则 $y' =$ 【 】
 - $2\sin 2x$
 - $-2\sin 2x$
 - $\sin 2x$
 - $-\sin 2x$
- 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, $f'(x) > 0$, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内零点的个数为 【 】
 - 3
 - 2
 - 1
 - 0
- 设 $2x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$ 【 】
 - 0
 - 2
 - x^2
 - $x^2 + C$

6. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 则 $\int f'(x) dx =$ 【 】

- $-\arctan x + C$
- $-\frac{1}{1+x^2} + C$
- $\arctan x + C$
- $\frac{1}{1+x^2} + C$

7. 设 $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$, $I_2 = \int_0^1 x^3 dx$, $I_3 = \int_0^1 x^4 dx$, 则 【 】

- $I_1 > I_2 > I_3$
- $I_2 > I_3 > I_1$
- $I_3 > I_2 > I_1$
- $I_1 > I_3 > I_2$

8. 设函数 $z = x^2 e^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} =$ 【 】

- 0
- $\frac{1}{2}$
- 1
- 2

9. 平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ 的一个法向量为 【 】

- $\{1, -3, 4\}$
- $\{1, 2, 4\}$
- $\{1, 2, -3\}$
- $\{2, -3, 4\}$

10. 微分方程 $yy' + (y')^3 + y^4 = x$ 的阶数为 【 】

- 1
- 2
- 3
- 4

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} =$ _____.

12. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 0, \\ a, & x \geq 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

14. 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 的极小值点 $x =$ _____.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.

16. $\int_{-1}^1 x \tan^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设函数 $z = x^3 + y^2$, $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 设函数 $z = x \arcsin y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

20. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = 2$, 求 k .

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = \sin(2x - 1)$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

设函数 $y = x \ln x$, 求 y'' .

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx$.

25. (本题满分 8 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 求 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

26. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $x = 1 - y^2$ 与 x 轴、 y 轴, 在第一象限围成的有界区域. 求:

(1) D 的面积 S ;

(2) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V .

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = 1, y = x, x$ 轴在第一象限围成的有界区域.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2 + x^3) = 1$, 故 $x + x^2 + x^3 + x^4$ 是 x 的等价无穷小.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = [\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2 = e^2$.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了零点存在定理的知识点.

【应试指导】 由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点, 且函数是单调函数, 故其在 (a, b) 上只有一个零点.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的原函数的知识点.

【应试指导】 由题可知 $\int f(x) dx = 2x + C$, 故 $f(x) = (\int f(x) dx)' = (2x + C)' = 2$.

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C$.

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 在区间 $(0, 1)$ 内, 有 $x^2 > x^3 > x^4$, 由积分的性质可知 $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx > \int_0^1 x^4 dx$, 即 $I_1 > I_2 > I_3$.

8. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y$, 故 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2 \times 1 \times 1 = 2$.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了平面的法向量的知识点.

【应试指导】 平面的法向量即平面方程的系数 $\{1, 2, -3\}$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了微分方程的阶的知识点.

【应试指导】 微分方程中导数的最高阶数称为微分方程的阶, 本题最高是 2 阶导数, 故本题阶数为 2.

二、填空题

11.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换定理的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$.

12.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x = 0 = f(0) = a$.

13.【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 $dy = d(e^{2x}) = e^{2x} \cdot (2x)' dx = 2e^{2x} dx$.

14.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, 当 $x = 2$ 或 $x = -2$ 时, $f'(x) = 0$, 当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 因此 $x = 2$ 是极小值点.

15.【答案】 $\arcsin x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.

16.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 被积函数 $x \tan^2 x$ 在对称区间 $[-1, 1]$ 上是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x \tan^2 x dx = 0$.

17.【答案】 $3x^2 dx + 2y dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 所以 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 dx + 2y dy$.

18.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \arcsin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

19.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, 设 $a_n = n$, 则有 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, 故其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

20.【答案】 $x^2 + C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量的微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y' = 2x$ 是可分离变量的微分方程, 两边同时积分得 $\int y' dx = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 2k = 1 + 2k = 2$,

故 $k = \frac{1}{2}$.

22. $y' = [\sin(2x-1)]'$
 $= \cos(2x-1) \cdot (2x-1)'$
 $= 2\cos(2x-1)$.

23. $y' = (x)' \ln x + x(\ln x)'$
 $= \ln x + 1$,

故 $y'' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

24. $\int (x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int e^x dx$
 $= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} x^{1 + \frac{1}{3}} + e^x + C$
 $= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + e^x + C$.

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 故

$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2}$
 $= -1 + 1 = 0$.

26. (1) 积分区域 D 可表示为: $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y^2$,

$S = \int_0^1 (1 - y^2) dy$
 $= \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1$
 $= \frac{2}{3}$.

(2) $V = \int_0^1 \pi y^2 dx$
 $= \pi \int_0^1 (1 - x) dx$
 $= \frac{\pi}{2}$.

27. 特征方程 $r^2 - 5r - 6 = 0$, 解得 $r_1 = -1$ 或 $r_2 = 6$,

故微分方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ (C_1, C_2 为任意常数).

28. 积分区域用极坐标可表示为: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$,

所以 $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr$
 $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1$
 $= \frac{\pi}{16}$.