



绝密★启用前

2020 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\int \frac{3}{x^5} dx =$

A. $-\frac{3}{5x^4} + C$

B. $\frac{3}{5x^4} + C$

C. $-\frac{3}{4x^4} + C$

D. $\frac{3}{4x^4} + C$

2. 设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f''(x) =$

A. $-\frac{1}{x^2}$

B. $\frac{1}{x^2}$

C. $-\frac{2}{x^2}$

D. $\frac{2}{x^2}$

3. $\int_{-2}^2 (1+x) dx =$

A. 4

B. 0

C. 2

D. -4

4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) =$

A. $5x^4$

B. $\frac{1}{5}x^4$

C. $1 + x^4$

D. x^4

5. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

A. $2y$

B. $2xy$

C. $3x^2 + y^2$

D. $3x^2 + 2xy$

6. 设函数 $y = x + 2\sin x$, 则 $dy =$

A. $(1 + \cos x)dx$

B. $(1 + 2\cos x)dx$

C. $(1 - \cos x)dx$

D. $(1 - 2\cos x)dx$

7. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz =$

A. $x dx - 4y dy$

B. $x dx - y dy$

C. $2x dx - 4y dy$

D. $2x dx - 8y dy$

8. 方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 表示的二次曲面是

A. 圆锥面

B. 球面

C. 旋转抛物面

D. 柱面

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$

A. 2

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

10. 微分方程 $y' + y = 0$ 的通解为 $y =$

A. Cxe^x

B. Cxe^{-x}

C. Ce^x

D. Ce^{-x}

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$

12. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$

14. $\int (3x + 2\sin x) dx =$ _____.

15. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为 _____.

16. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

17. 过点 $(-1, 2, 3)$ 且与直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{4}$ 垂直的平面方程为 _____.

18. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为 _____.

19. 区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为 _____.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\int x \sin x dx$.

22. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''(\frac{\pi}{2})$.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2\sin^2 x}$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y'' - y' - 2y = 0$ 的通解.

26. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

27. (本题满分 10 分)

已知区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 计算 $\iint_D xy \, dx \, dy$.

28. (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛区间.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C$.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二阶导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}, f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$.

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了牛顿—莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 $\int_{-2}^2 (1+x) dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^2 = 4$.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$, 故 $dy = y' dx = (1+2\cos x) dx$.

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -8y$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx - 8y dy$.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二次曲面的知识点.

【应试指导】 根据曲面方程的特点可知, 题中的曲面为圆锥面.

9. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}$.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 原微分方程分离变量得 $\frac{dy}{y} = -dx$, 两边积分 $\int \frac{1}{y} dy = -\int dx$, 解得 $\ln |y| = -x + \ln C_1$, 即 $|y| = C_1 e^{-x}$, 令 $C = \pm C_1$, 则有 $y = Ce^{-x}$.

二、填空题

11. 【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$.

12. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y' dx = 2e^{2x} dx$.

13. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

14. 【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (3x+2\sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$.

15. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了曲线的切线的知识点.

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为 $y' \Big|_{x=0} = \frac{3}{1+(3+1)^2} = \frac{3}{2}$.

16.【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了分段函数连续性的知识点.

【应试指导】 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,而 $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$,因此 $a = -2$.

17.【答案】 $2x + 3y + 4z = 16$

【考情点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 已知直线与所求平面垂直,故所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = (2, 3, 4)$,因此所求平面的方程为 $2(x+1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0$,即 $2x + 3y + 4z = 16$.

18.【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$,令 $f'(x) < 0$,则有 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

19.【答案】 $\frac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的应用的知识点.

【应试指导】 区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.

20.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对 x 求导,得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$,即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3 + 1}$,故有 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^3 + 1} \Big|_{x=1} = \frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \int x \sin x dx &= - \int x d(\cos x) \\ &= - (x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= - x \cos x + \int \cos x dx \\ &= - x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. f'(x) &= e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x (\cos x - \sin x), \\ f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1). \end{aligned}$$

$$25. \text{原方程对应的特征方程为 } r^2 - r - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } r_1 = -1, r_2 = 2.$$

$$\text{故原方程的通解为 } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

$$26. y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{得 } x = 1.$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } y'' > 0, \text{故 } (1, +\infty) \text{ 为曲线的凹区间;}$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } y'' < 0, \text{故 } (-\infty, 1) \text{ 为曲线的凸区间;}$$

$$\text{函数的拐点为 } (1, 1).$$

$$27. \text{积分区域 } D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iint_D xy dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} (0 - 1) \times \frac{1}{4} (1 - 0) \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

$$28. f(x) = \frac{1}{2+x}$$

$$= \frac{1}{3+x-1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n, -2 < x < 4.$$