



绝密★启用前

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = 2$, 则 $b =$

【 】

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. -2

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^2$ 为 x 的

【 】

A. 低阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量

D. 高阶无穷小量

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = 1$, 则 $f'(1) =$

【 】

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. -1

4. 设 $y = x + e^{-x}$, 则 $dy \Big|_{x=1} =$

【 】

A. $e^{-1} dx$

B. $-e^{-1} dx$

C. $(1 + e^{-1}) dx$

D. $(1 - e^{-1}) dx$

5. 曲线 $y = x \ln x$ 在点 (e, e) 处法线的斜率为

【 】

A. -2

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

6. $\int (\cos x)' dx =$

【 】

A. $\sin x + C$

B. $\cos x + C$

C. $-\sin x + C$

D. $-\cos x + C$

7. $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx =$

【 】

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx =$

【 】

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{2}$

9. 设 $z = y^5 + \arctan x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

【 】

A. $5y^4 + \frac{1}{1+x^2}$

B. $\frac{1}{1+x^2}$

C. $5y^4$

D. $5y^4 + \arctan x$

10. 设 $z = e^{2x-y}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

【 】

A. $-e^{2x-y}$

B. e^{2x-y}

C. $-2e^{2x-y}$

D. $2e^{2x-y}$

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} =$ _____.

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{2n^2 + 4n + 5} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 $y = xe^x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y + e^y = x$ 所确定的隐函数, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 曲线 $y = \frac{1}{x-2}$ 的铅直渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

17. $\int xe^{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. $\frac{d}{dx} \left(\int_2^x \tan t dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 过坐标原点且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、解答题(21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2ax + a^2, & x > 1, \\ -x, & x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 a .

22. (本题满分 8 分)

设 $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 dy .

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

求曲线 $y = 2x^3 - 6x^2$ 的凹、凸的区间及拐点.

25. (本题满分 8 分)

设 $z = \ln(x + y^2)$, 求 $dz \Big|_{(1,1)}$.

26. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2$ 的通解.

27. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由 $x = 0$, $y = x$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的闭区域.

28. (本题满分 10 分)

将 $y = e^{x+1}$ 展开成 x 的幂级数.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+bx) \sim bx$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = 2$.

2.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了高阶无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x^2$ 为 x 的高阶无穷小量.

3.【答案】A

【考情点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = 2$.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了函数的微分的知识点.

【应试指导】 $dy = (x + e^{-x})' dx = (1 - e^{-x}) dx$, 因此 $dy \Big|_{x=1} = (1 - e^{-1}) \Big|_{x=1} dx = (1 - e^{-1}) dx$.

5.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了曲线的法线的知识点.

【应试指导】 $y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, 因此曲线在点 (e, e) 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=e} = (\ln x + 1) \Big|_{x=e} = 2$, 故其法线的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

6.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的基本性质的知识点.

【应试指导】 $\int (\cos x)' dx = \int d(\cos x) = \cos x + C$.

7.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x \cos x + 1) dx = \int_{-1}^1 x \cos x dx + \int_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2$.

8.【答案】A

【考情点拨】 本题考查了广义积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \Big|_1^{+\infty} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

9.【答案】C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = (y^5)' = 5y^4$.

10.【答案】C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的高阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x-y} \cdot 2 = 2e^{2x-y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{2x-y} \cdot (-1) = -2e^{2x-y}$.

二、填空题

11. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2+2x+3} = \frac{0+1}{0+0+3} = \frac{1}{3}.$

12. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2+4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{2+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}.$

13. 【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数在 $x=0$ 处无定义,故其间断点为 $x=0$.

14. 【答案】 $(x+1)e^x$

【考情点拨】 本题考查了函数导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$

15. 【答案】 $\frac{1}{1+e^y}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对 x 求导,得 $y' + e^y \cdot y' = 1$, 即 $y' = \frac{1}{1+e^y}.$

16. 【答案】 $x=2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$, 故 $x=2$ 为曲线的铅直渐近线.

17. 【答案】 $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的第一换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

18. 【答案】 $\tan x$

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \left(\int_2^x \tan t dt \right) = \tan x.$

19. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

20. 【答案】 $3x-7y+5z=0$

【考情点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 已知所求平面与 $3x-7y+5z-12=0$ 平行,则其法向量为 $(3, -7, 5)$, 故所求方程为 $3(x-0) + (-7)(y-0) + 5(z-0) = 0$, 即 $3x-7y+5z=0$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + a^2) = 2a + a^2,$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1.$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 即 $2a + a^2 = -1$.

解得 $a = -1$.

$$22. y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$dy = y' dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx.$$

$$23. \text{令 } t = \sqrt{x}, \text{ 则 } x = t^2, dx = 2t dt.$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t \cos t}{t} dt$$

$$= 2 \int \cos t dt$$

$$= 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

$$24. y' = 6x^2 - 12x, y'' = 12x - 12.$$

由 $y'' = 12x - 12 = 0$ 得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 因此在区间 $(-\infty, 1)$ 曲线是凸的;

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 因此在区间 $(1, +\infty)$ 曲线是凹的;

当 $x = 1$ 时, $y = -4$, 点 $(1, -4)$ 为曲线的拐点.

$$25. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2},$$

$$\text{于是 } dz = \frac{1}{x + y^2} dx + \frac{2y}{x + y^2} dy,$$

$$\text{因此 } dz \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2} dx + dy.$$

$$26. \text{原方程对应的齐次方程的特征方程为 } r^2 - 3r + 2 = 0,$$

特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$.

故原方程对应的齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$,

$y^* = 1$ 为原方程的特解,

所以原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$.

$$27. \text{在极坐标系中, } D \text{ 可表示为 } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1.$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta) \cdot \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{16}.$$

$$28. e^{x+1} = e \cdot e^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$