

2023 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(一)试题

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
得 分					

第I卷 选择题 (共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $5x - \sin 5x$ 是 x 的()
A. 高阶无穷小量
B. 等价无穷小量
C. 同阶无穷小量,但不是等价无穷小量
D. 低阶无穷小量
2. 设 $y = \sqrt{2x+1}$, 则 $y' =$ ()
A. $\frac{3}{2\sqrt{2x+1}}$
B. $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$
C. $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$
D. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
3. 设 $y = e^{-x}$, 则 $dy =$ ()
A. $e^{-x} dx$
B. $-e^{-x} dx$
C. $e^x dx$
D. $-e^x dx$
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ b+x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $b =$ ()
A. 2
B. 1
C. 0
D. -1
5. $\int \sin x dx =$ ()
A. $\sin x + C$
B. $-\sin x + C$
C. $\cos x + C$
D. $-\cos x + C$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt}{x^2} =$ ()
A. 2
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. 0

7. 设 $z = \frac{x}{y} + xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
A. $\frac{1}{y} + y$
B. $-\frac{x}{y^2} + x$
C. $\frac{1}{y} + x$
D. $-\frac{x}{y^2} + y$

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域是()
A. $(-1, 1)$
B. $(-1, 1]$
C. $[-1, 1)$
D. $[-1, 1]$

9. 已知直线 $\frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4}$ 在平面 $3x - 2y + z - 7 = 0$ 上, 则 $k =$ ()
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

10. 微分方程 $y'' + y = e^{2x}$ 的一个特解是()
A. $y^* = \frac{1}{5}e^{2x}$
B. $y^* = \frac{1}{5}e^x$
C. $y^* = \frac{1}{5}xe^{2x}$
D. $y^* = \frac{1}{5}xe^x$

第II卷 非选择题 (共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.
12. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} =$ _____.
13. 设 $y = x + e^x$, 则 $y'' =$ _____.
14. 设 $y = x + \sin x$, 则 $y' =$ _____.

15. $\int (x^2 + e^x) dx =$ _____.

16. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx =$ _____.

17. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$ _____.

18. 过点 $(0, 1, 1)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 垂直的平面方程为_____.

19. 设区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x dx dy$ _____.

20. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的解为 $y =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$.

22. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^2 (x^2 - e^{-x}) dx$.

23. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y' - \frac{2}{x}y = x^3$ 的通解.

24. (本题满分 8 分)

设 $z = \sin xy$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

25. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ 的单调区间和极值.

26. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = 1 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的平面图形.

(1) 求 D 的面积 S ;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

27. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $y = -x$ 所围成的闭区域.

28. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x (1 + t^2) f(t) dt = x \sin x$, 求 $f(x)$.

2023 年成人高等学校招生全国统一考试
高等数学(一)试题参考答案

一、选择题

1.A 2.D 3.B 4.B 5.D 6.C 7.B 8.D 9.C 10.A

二、填空题

11. e^2 12. 3 13. e^x
14. $1 + \cos x$ 15. $\frac{1}{3}x^3 + e^x + C$ 16. $\frac{1}{3}$
17. $e^{xy}(ydx + xdy)$ 18. $x + 2y + z - 3 = 0$ 19. 4
20. $\frac{1}{x}$

三、解答题

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $= 1.$
22. 解: $\int_0^2 (x^2 - e^{-x})dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 e^{-x} d(-x)$
 $= \left(\frac{1}{3}x^3 + e^{-x} \right) \Big|_0^2$
 $= \frac{5}{3} + e^{-2}.$
23. 解: 由题可知 $P(x) = -\frac{2}{x}, Q(x) = x^3.$
通解为 $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$
 $= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int x^3 e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right)$
 $= x^2 \left(\int x^3 \cdot \frac{1}{x^2} dx + C \right)$
 $= x^2 \left(\int x dx + C \right)$
 $= x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)$

$$= \frac{1}{2}x^4 + Cx^2.$$

24. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos xy(xy)' = y \cos xy,$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(\cos xy)' = -y \sin xy(xy)' = -y^2 \sin xy.$

25. 解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty), f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x),$
令 $f'(x) = 0,$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 2.$ 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	—	0	+	0	—
y	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

由表可知, 函数的单调增区间为 $(0, 2);$ 单调减区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty).$
极大值为 $f(2) = 4e^{-2},$ 极小值为 $f(0) = 0.$

26. 解: (1) $S = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3};$
(2) $V = \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx$
 $= \pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx$
 $= \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}\pi.$

27. 解: 的分区域用数坐标听表示为 $D: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1.$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D r^2 dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

28. 解: 由于 $\int_0^x (1 + t^2)f(t)dt = x \sin x.$
两边同时求导得 $(1 + x^2)f(x) = \sin x + x \cos x,$
所以 $f(x) = \frac{\sin x + x \cos x}{1 + x^2}.$

弥 封 线 内 不 要 答 题