

2025 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $f(x) = \sin 7x$, 则 $f'(\frac{\pi}{7}) =$ []
A. 7 B. 1 C. -1 D. -7
2. 设 $y = 2x^3 - e^x$, 则 $y'' =$ []
A. e^x B. 12 C. $12 - e^x$ D. $6 + 3e^x$
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{5}{x} \cos \frac{3}{x}$ []
A. 是无穷大量 B. 无界但不是无穷大量
C. 是无穷小量 D. 有界但不是无穷小量
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1})^{\frac{1}{n}} =$ []
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 由曲线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$, x 轴所围成的图形的面积为 []
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
6. $\int (x + \frac{1}{x})^2 dx =$ []
A. $\frac{1}{3}(x + \frac{1}{x})^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$
C. $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$ D. $\frac{x^2}{2} + \ln x + C$

7. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int e^{2-x} f(e^{2-x}) dx =$ []

- A. $F(e^{2-x}) + C$ B. $-F(e^{2-x}) + C$
C. $F(e^x) + C$ D. $-F(e^x) + C$

8. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+5)^2} dx =$ []

- A. $-\frac{1}{5}$ B. 0 C. $\frac{1}{5}$ D. 1

9. $\int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx =$ []

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{13}{4}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{20}{3}$

10. 已知球的一条直径的两个端点分别为 $(2, -3, 5)$, $(4, 1, -3)$, 则该球的球面的方程为 []

- A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 36$ B. $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 16$
C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$ D. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径为 []

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

12. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{e^{xy}-1}, & xy \neq 0, \\ a, & xy = 0 \end{cases}$ 为连续函数, 则 $a =$ []

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. $-\frac{1}{3}$

第 II 卷(非选择题,共 66 分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15 小题,每小题 7 分,共 21 分)

13. 若 $x = e$ 是函数 $y = (x-a) \ln x$ 的驻点, 则 $a =$ _____.

14. $\int x^2 e^{2x} dx =$ _____.

15. 设 $z = 15 + x^2 y + \cos y$, 则 $dz =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分15分)

求微分方程 $\frac{y'}{1+x^2} = 2y$ 的通解.

17. (本题满分15分)

计算 $\iint_D (4-x-y) dx dy$, 其中 D 是由 x 轴, y 轴, 直线 $x=2, y=3$ 所围成的闭区域.

18. (本题满分 15 分)

设 $0 < a \leq e$, 证明: $a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考点点拨】 本题考查了三角函数的导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = \cos(7x) \cdot 7 = 7\cos 7x$, 故 $f'\left(\frac{\pi}{7}\right) = 7\cos\left(7 \times \frac{\pi}{7}\right) = -7$.

2. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (2x^3 - e^x)' = 6x^2 - e^x$, $y'' = (6x^2 - e^x)' = 12x - e^x$, $y''' = (12x - e^x)' = 12 - e^x$.

3. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了无穷大量的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{5}{x} \rightarrow \infty$, 而 $\cos \frac{3}{x}$ 的取值范围是 $[-1, 1]$, 因此 $\frac{5}{x} \cos \frac{3}{x}$ 是无界的. 当 $x =$

$\frac{3}{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}$, 且 $k \rightarrow \infty$) 时, $\cos \frac{3}{x} = \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0$, 因此 $\frac{5}{x} \cos \frac{3}{x}$ 不满足无穷大量的定义, 故 $\frac{5}{x} \cos \frac{3}{x}$

无界但不是无穷大量.

4. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 $1^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, 所以根据夹逼定理,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

5. 【答案】 A

【考点点拨】 本题考查了用微积分求面积的知识点.

【应试指导】 所围成图形的面积 $S = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$.

6. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$.

7. 【答案】 B

【考点点拨】 本题考查了不定积分与原函数的知识点.

【应试指导】 $\int e^{2-x} f(e^{2-x}) dx = - \int e^{2-x} f(e^{2-x}) d(2-x) = - \int f(e^{2-x}) de^{2-x} = -F(e^{2-x}) + C$.

8. 【答案】 C

【考点点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+5)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+5)^2} d(x+5) = -\frac{1}{x+5} \Big|_0^{+\infty} = -\left(0 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

9.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{20}{3}.$$

10.【答案】C

【考情点拨】 本题考查了球面方程的知识点.

【应试指导】 球直径的两个端点为 $A(2, -3, 5)$ 和 $B(4, 1, -3)$, 则球心为 $(3, -1, 1)$, $|AB|^2 = (4-2)^2 + [1-(-3)]^2 + (-3-5)^2 = 4 + 16 + 64 = 84$, 设半径为 r , 则 $r^2 = \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = \frac{|AB|^2}{4} = 21$, 故球面的方程为 $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$.

11.【答案】B

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

$$\text{【应试指导】 令 } a_n = \frac{5^n}{\sqrt{n}}, \text{ 则 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{\frac{5^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 5, \text{ 故幂级数的收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5}.$$

12.【答案】D

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

$$\text{【应试指导】 由于 } f(x, y) \text{ 在 } xy=0 \text{ 时连续, 故有 } a = \lim_{\eta \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-xy}-1}{e^\eta-1} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(-xy)}{xy} = -\frac{1}{3}.$$

二、填空题

13.【答案】2e

【考情点拨】 本题考查了函数驻点的知识点.

【应试指导】 $y' = (x-a)\ln x + (x-a)(\ln x)' = \ln x + \frac{x-a}{x}$, 由于 $x=e$ 是驻点, 所以有

$$y' \Big|_{x=e} = \left(\ln x + \frac{x-a}{x} \right) \Big|_{x=e} = 1 + \frac{e-a}{e} = 0, \text{ 解得 } a = 2e.$$

14.【答案】 $\frac{1}{6}e^{2x^3} + C$ (C 为任意常数)

【考情点拨】 本题考查了用凑微分法求不定积分的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \int x^2 e^{2x^3} dx = \int \frac{1}{3} \cdot 3x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{2x^3} d(2x^3) = \frac{1}{6} \int e^{2x^3} d(2x^3) = \frac{1}{6} e^{2x^3} + C \text{ (} C \text{ 为任意常数)}.$$

15.【答案】 $2xydx + (x^2 - \sin y)dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \sin y, \text{ 所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xydx + (x^2 - \sin y)dy.$$

三、解答题

$$16. \text{ 将原方程分离变量得 } \frac{dy}{y} = 2(1+x^2)dx,$$

$$\text{两边积分 } \int \frac{dy}{y} = 2 \int (1+x^2)dx,$$

$$\text{解得 } \ln |y| = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + C_1,$$

$$\text{整理得 } y = \pm e^{2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + C_1} = \pm e^{C_1} e^{2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)},$$

$$\text{令 } C = \pm e^{C_1}, \text{ 则通解为 } y = Ce^{2x + \frac{2}{3}x^3}.$$

$$17. \text{ 积分区域 } D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3.$$

$$\begin{aligned} \iint_D (4-x-y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^3 (4-x-y) dx dy \\ &= \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^3 dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{15}{2} - 3x \right) dx \\ &= \left(\frac{15}{2}x - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= 9. \end{aligned}$$

$$18. \text{ 构造函数 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x, x > 0.$$

$$\text{则 } f'(x) = x - \frac{a}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = x - \frac{a}{x} = 0, \text{ 解得 } x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a} \text{ (舍去)}.$$

当 $0 < x < \sqrt{a}$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > \sqrt{a}$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

因此 $f(x)$ 在 $x = \sqrt{a}$ 处取得极小值,

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \ln a = \frac{1}{2}a(1 - \ln a),$$

$$\text{由于 } 0 < a \leq e, \text{ 有 } \ln a \leq 1, \text{ 所以 } f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a) \geq 0,$$

$$\text{因此 } f(x) \geq f(\sqrt{a}) \geq 0,$$

$$\text{即 } a \ln x \leq \frac{1}{2}x^2.$$