

极限与连续的 62 个典型习题

习题 1 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 记 $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则有

$$(a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \geq (a^n)^{\frac{1}{n}} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a = a. \text{ 另一方面}$$

$$(a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leq (ma^n)^{\frac{1}{n}} = a \cdot (m)^{\frac{1}{n}}.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{n}} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m}) = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot m^{\frac{1}{n}} = a$. 利用两边夹定理, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a, \text{ 其中 } a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n + 5^n + 9^n)^{\frac{1}{n}} = 9$.

习题 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

解

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + n + n} < \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} < \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + n + 1},$$

$$\text{即 } \frac{n(n+1)}{2(n^2 + 2n)} < \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} < \frac{n(1+n)}{2(n^2 + n + 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+n)}{2(n^2 + 2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+n)}{2(n^2 + n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

利用两边夹定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2}.$$

习题 3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)})^n$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)})^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}))^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{(n+1)-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot (1 - \frac{1}{n+1})^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{-(n+1)})^{-(n+1)}]^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{-1} = e^{-1} \cdot 1 = e^{-1} \end{aligned}$$

习题 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - \sqrt[m]{x}} \quad (m, n \in N)$.

解 (变量替换法) 令 $t = \sqrt[n]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$. 于是,

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^m}{1 - t^n} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{m-1})}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})} = \frac{m}{n}.$$

习题 5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{x-1})^{\sqrt{x}}$.

解 (变量替换法) 令 $\sqrt{x} = t, x \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{t^2}{t^2-1})^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{t}{t-1} \cdot \frac{t}{t+1})^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{t})^{-1} \cdot (1 - \frac{1}{t})^{-1}]^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^{-t} \cdot (1 - \frac{1}{t})^{-t} = e^{-1} \cdot e = e^0 = 1. \end{aligned}$$

习题 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{3-e^x}{2+x})^{\frac{1}{\sin x}} \quad (1^\infty \text{ 型})$ 。

为了利用重要极限, 对原式变形

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{3-e^x}{2+x})^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2+x+1-x-e^x}{2+x})^{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{1-x-e^x}{2+x} \cdot \frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \frac{1-x-e^x}{2+x})^{\frac{2+x}{1-x-e^x}}]^{\frac{-x-x}{2+x} \cdot \frac{1}{\sin x}} = e^{-2/2} = e^{-1} \end{aligned}$$

习题 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$. 解 原式

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}-4}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \frac{-2}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

习题 8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$. 解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x(3-\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{(4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2})}}{(3-\frac{2}{x})} = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2} \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}. \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2} \text{ 不存在。}$$

习题 9 研究下列极限 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

$\because$ 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $|\sin x| \leq 1$. $\therefore$ 上式极限等于 0, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. (2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

因为 $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

习题 10 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a^x)^{\frac{1}{x}}$, $(a > 0, a \neq 1)$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} a(1 + xa^{-x})^{\frac{1}{x}} = a \lim_{x \rightarrow 0} (1 + xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}} \cdot a^{-x}}$$

$$= a \cdot [\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xa^{-x})^{\frac{1}{xa^{-x}}} \lim_{x \rightarrow 0} a^{-x}] = a \cdot e^1 = ae.$$

$$\text{习题 11} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\alpha \ln x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\alpha \ln x} - 1}{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha \ln x}{x - 1}$$

$$= \lim_{\alpha \ln x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln x} - 1}{\alpha \ln x} \cdot \lim_{(x-1) \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln[1 + (x-1)]}{x - 1} = 1 \times \alpha \times 1 = \alpha.$$

习题 12 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx + c}{1 - x} = 5$, 求 b, c 的值。

解 首先 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + bx + c = 1 + b + c = 0$, $\therefore b = -1 - c$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-c)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x-c)] = c - 1 = 5,$$

$\therefore c = 6$, 而 $b = -(1 + c) = -(1 + 6) = -7$.

习题 13 下列演算是否正确?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underset{\substack{\downarrow 0 \\ \text{有界}}}{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

习题 14 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = 0.$$

习题 15 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sin x^2}{x+1}.$

解 $\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 0, \quad |\sin x^2| \leq 1, \quad \text{原式} = 0.$

习题 16 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b} = e^{k(m-n)}$ (m, n, k, b 为常数)。

证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n+(m-n)}{x+n}\right)^{kx+b} \quad (\text{令 } \frac{1}{x+n} = \frac{1}{y})$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{x+m}{x+n}\right)^{kx+b} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m-n}{y}\right)^{k(y-n)+b}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m-n}{y}\right)^{k(m-n) \cdot \frac{y}{m-n} - kn+b}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{m-n}{y}\right)^{\frac{y}{m-n}}\right]^{k(m-n)} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m-n}{y}\right)^{-kn+b}$$

$$= e^{k(m-n)} \cdot 1 = e^{k(m-n)}.$$

习题 17 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{3}{x}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-\sin x))^{\frac{1}{-\sin x} \cdot \frac{-3 \cdot \sin x}{x}} = e^{-3}.$

习题 18 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$ 解 (连续性法)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \ln \frac{x}{a} = \lim_{x \rightarrow a} \ln \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \ln \left[1 + \frac{x-a}{a}\right]^{\frac{a}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]^{\frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a}.$$

习题 19 试证方程 $x = a \sin x + b$ (其中 $a > 0, b > 0$) 至少有一个正根, 并且它不大于 $a + b$.

证 设 $f(x) = a \sin x + b - x$, 此初等函数在数轴上连续, $\therefore f(x)$ 在 $[0, a + b]$ 上必连续。 $\because f(0) = b > 0$, 而

$$f(a + b) = a \sin(a + b) - (a + b) + b = a[\sin(a + b) - 1] \leq 0 \quad \text{若 } f(a + b) = 0,$$

则 $a + b$ 就是方程 $x = a \sin x + b$ 的一个正根。

若 $f(a + b) < 0$, 则由零点存在定理可知在 $(0, a + b)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0, a + b)$, 使 $f(\xi) = 0$. 即 $\xi = a \sin \xi + b$.

故方程 $x = a \sin x + b$ 至少有一正根, 且不大于 $a + b$.

习题 21 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \{[1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{-1} = e^{-1}$.

习题 20 设 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$. 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

证 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = r < 1$, 取 $\varepsilon = \frac{1-r}{2} > 0$, $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时有

$$\left| \frac{x_n}{x_{n-1}} - r \right| < \varepsilon = \frac{1-r}{2}, \text{ 即 } 0 < \frac{x_n}{x_{n-1}} < r + \frac{1-r}{2} = \frac{r+1}{2}, \text{ 亦即 } 0 < x_n < \frac{r+1}{2} x_{n-1},$$

于是递推得 $0 < x_n < \frac{r+1}{2} x_{n-1} < \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 x_{n-2} < \dots < \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-N} x_N$

$\because \frac{r+1}{2} < 1$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-N} x_N = 0$, 从而由两边夹准则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

习题 22 用定义研究函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ 的连续性。

证 首先, 当 $x > 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$ 是连续的。同理, 当

$x < 0$, $f(x) = 0$ 也是连续的。而在分段点 $x = 0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} = 0 = f(0).$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. 故 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$.

习题 23 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} = 1$.

证 $\because \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} < \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}} < 1$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1. \text{ 由两边夹定理知,}$$

原式成立.

习题 24 设 $F(x, y) = \frac{f(y-x)}{2x}$, $F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5$. 任取 $x_0 > 0$, 记

$x_1 = F(x_0, 2x_0), \dots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n), \dots$ 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求极限值.

$$\text{证 } \because F(1, y) = \frac{f(y-1)}{2} = \frac{y^2}{2} - y + 5 = \frac{1}{2}[(y-x)^2 + 9],$$

$$\therefore f(y-1) = (y-1)^2 + 9, \therefore f(y-x) = (y-x)^2 + 9. \text{ 故}$$

$$F(x, y) = \frac{(y-x)^2 + 9}{2x}. \text{ 由题设}$$

$$x_1 = \frac{(2x_0 - x_0)^2 + 9}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 9}{2x_0}, x_2 = \frac{x_1^2 + 9}{2x_1}, \dots, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n}, \dots \text{ 由于}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{9}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{9}{x_n}} = 3, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{3^2} \right) = 1$$

$\therefore x_{n+1} \leq x_n$. 故 $\{x_n\}$ 单调有下界, 故有极限。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$,

由 $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n} \Rightarrow A = \frac{A^2 + 9}{2A}$, 解出 $A = 3$ (舍去 $A = -3$)。

习题 25 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}, n = 1, 2, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 显然 $x_0 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 2 \therefore \{x_n\}$ 有上界 2, 有下界 0.

$$x_1 - x_0 = 1 + \frac{x_0}{1+x_0} - x_0 = \frac{1+x_0-x_0^2}{1+x_0}, \text{ 当 } 0 < x_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 时}$$

$1+x_0-x_0^2 \geq 0$, 即 $x_1 \geq x_0$, 假设 $x_n > x_{n-1}$, 则

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0. \text{ 故 } \{x_n\} \text{ 单增。} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

存在。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ 得 $A = 1 + \frac{A}{1+A}$, 即

$$A^2 - A - 1 = 0, \therefore A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去负值)。当 } x_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 时, 有 } x_1 < x_0,$$

用完全类似的方法可证 $\{x_n\}$ 单减有下界 0, 同理可证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

习题 26 设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出 $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, n = 1, 2, \dots$ 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

解 $\{x_n\}$ 不是单调的, 但 $\{x_{2n-1}\}$ 单增, 并以 3 为上界, 故有极限。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = B$. $\{x_{2n}\}$ 单减, 并以 2 为下界, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = C$. 在等式

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} \text{ 两边按奇偶取极限, 得两个关系 } B = 2 + \frac{1}{C}, C = 2 + \frac{1}{B},$$

解出 $B = C$. 由于的奇数列与偶数列的极限存在且相等, 因此 $\{x_n\}$

的极限存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x_n})$. 故有 $A = 2 + \frac{1}{A}$,

解出 $A = 1 + \sqrt{2}$, (舍去负值 $1 - \sqrt{2}$)

习题 27 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$, 试证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限。

证 显然 $x_n > 0$, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则由 $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$ 令 $n \rightarrow \infty$, 可解出

$A = 2$ (舍去 -2)。下面证明 $\{x_n\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$. 由于

$$|x_n - \sqrt{2}| = \left| \frac{(\sqrt{2}-1)(x_{n-1} - \sqrt{2})}{x_{n-1} + 1} \right| < (\sqrt{2}-1) |x_{n-1} - \sqrt{2}|,$$

递推可得 $|x_n - \sqrt{2}| < (\sqrt{2}-1)^2 |x_{n-2} - \sqrt{2}| < \dots < (\sqrt{2}-1)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}|$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2}-1)^{n-1} = 0$. 由两边夹可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{2}| = 0$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

习题 28 设 $f_1(t) = f(t) > 0, f_{n+1}(t) = \frac{2f_n^2(t)}{1+f_n^2(t)}$. 试证

(1) $\forall t, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ 存在; (2) 当 $f(t) \geq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1$; 当 $f(t) < 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0;$$

证 $\forall n$, 显然有 $f_n(t) \geq 0$, 又 $f_{n+1}(t) - f_n(t) = -f_n(t) \frac{[f_n(t)-1]^2}{1+f_n^2(t)} \leq 0$.

$\therefore \forall t, f_n(t)$ 单减有下界。 $\therefore$ 收敛。 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = F(t)$, 在原式两边取

极限得 $F(t) = \frac{2F^2(t)}{1+F^2(t)}$. 由此可解出 $F(t) = 0$ 或 $F(t) = 1$. 当 $f(t) \geq 1$ 时,

$f_2(t) = \frac{2f_1^2(t)}{1+f_1^2(t)} \geq \frac{2f^2(t)}{2f^2(t)} = 1$. 归纳假设 $f_k(t) \geq 1$, 则 $f_k^2(t) \geq 1$, 而

$f_{k+1}(t) = \frac{2f_k^2(t)}{1+f_k^2(t)} \geq \frac{2f_k^2(t)}{2f_k^2(t)} = 1, \therefore \forall n, \text{ 有 } f_n(t) \geq 1$. 因此 $f(t) \geq 1$ 时

$F(t) = 1$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1, (f(t) \geq 1 \text{ 时})$ 。

当 $f(t) < 1$ 时, 由 $f_n(t)$ 的单减性便知即当 $F(t) = 0$ 时, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad (\text{当 } f(t) < 1 \text{ 时}).$$

习题 29
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{\sin x \sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 2x} \right)^{\frac{1}{2 \sin x \sin 2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \frac{-1}{4 \cos x}}}{(1 - \sin^2 2x)^{\frac{-1}{\sin^2 2x} \cdot (-\cos x)}} = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{e^{-1}} = e^{\frac{3}{4}}.$$

习题 30 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^n}{n!} = 0$.

证 $\because \{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 故 $\{x_n\}$ 必有界。设

$$|x_n| \leq B, n = 1, 2, \dots \text{ 因此 } 0 \leq \left| \frac{(x_n)^n}{n!} \right| \leq \frac{B^n}{n!}, \text{ 而 } \frac{B^n}{n!} \rightarrow 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^n}{n!} = 0.$$

习题 31 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2}$. $(0 < \frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{1}{n}, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^2} = 0)$

变量替换求极限法

(为求 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, 有时可令 $x = \varphi(y)$, 而 $F(x) = F[\varphi(y)]$)

习题 32 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\beta}} - 1}{x}$ (β 为自然数)

解 令 $(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\beta}} - 1 = y$, 则 $x = \frac{[(y+1)^\beta - 1]}{\alpha}$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\beta}} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{[(y+1)^\beta - 1]}{\alpha}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha y}{y^\beta + c_\beta^1 y^{\beta-1} + \dots + c_\beta^{\beta-1} y + 1 - 1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha}{y^{\beta-1} + c_\beta^1 y^{\beta-2} + \dots + \beta y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

习题 33 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{1}{m}x}{x^2}$.

解 令 $\sqrt[m]{1+x} - 1 = y, \Rightarrow x = (y+1)^m - 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $y \rightarrow 0$, 故 原式

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \frac{1}{m}[(1+y)^m - 1]}{[(y+1)^m - 1]^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{m-1}{2}y^2 + \dots}{m^2 y^2 + \dots} = -\frac{m-1}{2m^2}.$$

习题 34 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), a > 0$.

解 先求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[x]{a} - \sqrt[x+1]{a})$, 令 $\frac{1}{x} = t$, 则上式

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^t - a^{\frac{1}{1+t}}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} a^t \cdot \frac{1 - a^{-\frac{t}{1+t}}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \exp(-\frac{t^2}{1+t} \ln a)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t^2}{1+t} \ln a}{t^2} = \ln a. \quad \text{故原式} = \ln a. \end{aligned}$$

用等价无穷小替换求极限

习题 35 求 $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2} \quad (n \in \mathbb{N})$.

解 记 $x = \sqrt[n]{\cos n\varphi}$, 则 $x \rightarrow 1 (\varphi \rightarrow 0)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1})}{\varphi^2 (1+x+\dots+x^{n-1})} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1-x^n}{n\varphi^2} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1-\cos n\varphi}{n\varphi^2} \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(n\varphi)^2}{n\varphi^2} = \frac{n}{2} \quad (\text{当 } u \rightarrow 0, 1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2) \end{aligned}$$

习题 36 设 $f(x)$ 与 x 是等价无穷小, $f(x) \neq x$, 求证

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^x = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[f(x)]^x - x^x}{f(x) - x} = 1.$$

证 $\because f(x) \sim x$, 即 $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0)$, $\therefore \frac{f(x)}{x} = 1 + \alpha(x)$,

其中 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow 0$, 即 $f(x) = x[1 + \alpha(x)]$ (当 $x \rightarrow 0$). 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x [1 + \alpha(x)]^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \alpha(x)]^x$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)} \cdot x \alpha(x)} = e^0 = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[f(x)]^x - x^x}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \cdot \frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x} - 1}{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}} \cdot \frac{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}}{f(x) - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln[\frac{f(x)}{x}]^x} - 1}{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \frac{f(x)}{x}} - 1}{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x \ln \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \frac{f(x)}{x}} - 1}{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ln \frac{f(x)}{x}}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ln f(x) - x \ln x}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x) - x} \cdot \ln[1 + \frac{f(x) - x}{x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln[1 + \frac{f(x) - x}{x}]^{\frac{x}{f(x) - x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \frac{f(x) - x}{x}]^{\frac{x}{f(x) - x}} = \ln e = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[f(x)]^x - x^x}{f(x) - x} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

习题 37 设 $f(x) \in C[0, n]$, n ($n \geq 2$) 为自然数, $f(0) = f(n)$. 试证

$\exists \xi, \xi + 1 \in [0, n]$, 使 $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

证 (分析: 要证 $\exists \xi, \xi + 1 \in [0, n]$, 使 $f(\xi) = f(\xi + 1)$. 即要证

$g(x) = f(x+1) - f(x)$ 有根 ξ) 令 $g(x) = f(x+1) - f(x)$, 显然在 $[0, n-1]$

上连续, 于是 $g(i) = f(i+1) - f(i), i = 1, \dots, n-1$. 记

$m = \min_{0 \leq i \leq n-1} \{g(i)\}, M = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{g(i)\}$, 则

$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(i) \leq M$, 又 $\sum_{i=0}^{n-1} g(i) = f(n) - f(0) = 0$. 对函数 $g(x)$ 应用介值定

理, 知 $\exists \xi \in [0, n-1]$, 使 $g(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(i) = 0$, 即存在 $\xi, \xi + 1 \in [0, n]$, 使

$f(\xi + 1) = f(\xi)$.

习题 38 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $a < c < d < b$, 证明 $\exists \xi \in [a, b]$,

使 $(\alpha + \beta)f(\xi) = \alpha f(c) + \beta f(d)$.

证 (分析: 将结果变形 $f(\xi) = \frac{\alpha f(c) + \beta f(d)}{\alpha + \beta} \triangleq \mu$)

记 $m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, $M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, 则 $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$

于是 $(\alpha + \beta)m \leq \alpha f(c) + \beta f(d) \leq (\alpha + \beta)M$

或 $m \leq \frac{\alpha f(c) + \beta f(d)}{\alpha + \beta} \leq M$

由介值定理知

$\exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \frac{\alpha f(c) + \beta f(d)}{\alpha + \beta}$, 即 $(\alpha + \beta)f(\xi) = \alpha f(c) + \beta f(d)$.

习题 39 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ 且 $f[f(x)] = x$. 证 $\exists \xi$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证 反证法。若不存在点 ξ 使 $f(\xi) = \xi$. 即 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) \neq x$. $\because f(x)$ 连续, 不妨设恒有 $f(x) > x$. 于是 $f[f(x)] > f(x) > x$. 此与 $f[f(x)] = x$ 矛盾。故 $\exists \xi$, 使 $f(\xi) = \xi$.

习题 40 设 $f(x) \in C(a, b)$ 且 $f(x) > 0$. 又 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 证明至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$.

证 $\because f(x) \in C(x_1, x_n)$, 故 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 使 $0 < m \leq f(x_i) \leq M, i = 1, 2, \dots, n$. 于是 $m \leq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)} \leq M$ 由介值定理, 知 $\exists \xi \in [x_1, x_n] \subset (a, b)$, 使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$.

习题 41 证明方程 $x \cdot 2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根。

证 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 显然 $f(x) \in C[0, 1]$, 但

$f(0) = -1 < 0, f(1) = 2 - 1 = 1 > 0, \therefore \exists x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = x_0 \cdot 2^{x_0} - 1 = 0$, 即

方程 $x \cdot 2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根 x_0 存在。

习题 42 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 连续, 求 a, b .

$$\text{解 } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}, & |x| > 1 \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1 \\ -\frac{1-a+b}{2}, & x = -1 \end{cases}$$

故 $f(1+0) = 1, f(1-0) = a+b, f(-1+0) = a-b, f(-1-0) = -1$. 由于 $f(x)$ 在

$=1, -1$ 处连续, 所以 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=1$.

习题 43 试证方程 $xe^x = x + \cos \frac{\pi}{2}x$ 至少有一个实根。

证 做函数 $f(x) = xe^x - x - \cos \frac{\pi}{2}x$. 显然

$f(0) = -1 < 0, f(1) = e - 1 > 0, \therefore \exists \xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 0$. 即 $xe^x = x + \cos \frac{\pi}{2}x$ 在 $(0,1)$ 内必有实根。

习题 44 求 $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$ 的连续区间。

(解: 先改写为分段函数, 结论为: $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$)

习题 45 求 b 为何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ bx - 2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$, 在 $[0,3]$ 上处

处连续。

只需讨论分段点处的连续性: $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2)$,

$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 2) = 2b - 2 = f(2)$, 要在 $x=2$ 处连续, 必有

$$2b - 2 = 3, \Rightarrow b = \frac{5}{2}.$$

习题 46 设 $a > 0, x_1 > 0$, 定义 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3}), n = 1, 2, \dots$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + x_n + x_n + \frac{a}{x_n^3}) \geq \sqrt[4]{x_n \cdot x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^3}} = \sqrt[4]{a} \therefore \{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[4]{a}$. 即

$\forall n \in N$, 有 $x_n \geq \sqrt[4]{a}$. 又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}(3 + \frac{a}{x_n^4}) \leq \frac{1}{4}(3 + \frac{a}{a}) = 1$, 即 $\{x_n\}$ 单减有下

界, 故有极限。设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 且 $A \geq \sqrt[4]{a} > 0$. 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n + \frac{a}{x_n^3})$ 有

$$A = \frac{1}{4}(3A + \frac{a}{A^3}) \Rightarrow A = \sqrt[4]{a}$$

(舍去负根) (注意: 先证明极限的存在是必要的。)

习题 47

设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} = \sqrt{a + x_1}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

$n = 1, 2, \dots$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(解: $\{x_n\}$ 单增有上界 $1 + \sqrt{a}$, 可解出极限 $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$)

习题 48 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 证明 $\exists \xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证 若 $f(0) = 0$, 则取 $\xi = 0$. 若 $f(1) = 1$, 则可取 $\xi = 1$. $f(0) > 0, f(1) < 1$,

则令 $g(x) = f(x) - x$, 必有 $g(x) \in C[0, 1]$ 且 $g(0) \cdot g(1) < 0$, 由零点定理知

$\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

习题 49 (选择题) 设 $f(x), \varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 连续且

$f(0) \neq 0, \varphi(x)$ 有间断点, 则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点, (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点,

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点, (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 选[D] (A) 因 $f(x)$ 的值域可能很小。

(B) 反例 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 而 $[\varphi(x)]^2 \equiv 1$ 无间断点。

(C) $\because \varphi(x)$ 总有定义。

习题 50 证明方程 $x = a \sin x + b$ ($a > 0, b > 0$) 至少有一个正根, 且不超过 $a + b$.

证 设 $f(x) = a \sin x + b - x$, $\because f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\therefore f(x) \in C[0, a + b]$, 而

$$\begin{aligned} f(0) &= b > 0, f(a + b) = a \sin(a + b) + b - (a + b) \\ &= a[\sin(a + b) - 1] \leq 0. \end{aligned}$$

如果 $f(a + b) = 0$, 则 $a + b$ 即为 $f(x)$ 的零点. 如果 $f(a + b) < 0$, 则由介值定理知 $\exists \xi \in (0, a + b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 ξ 为所求, 故原命题成立.

习题 51 若函数 $f(x)$ 可以达到最大值和最小值, 求证 $\max[-f(x)] = -\min f(x)$.

证 设 $\min f(x) = f(x_0)$, 则对任意 x 有 $f(x) \geq f(x_0)$, 或有 $-f(x) \leq -f(x_0) (= -\min f(x))$. 由 x 的任意性, 可知

$$\max[-f(x)] = -f(x_0) = -\min f(x).$$

习题 52 设 $f(x) \in C[a, b]$ 且恒大于零, 证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证 任取 $x_0 \in [a, b]$ 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续且大于 0, $\therefore \exists \delta_1 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时 (若 $x_0 = a$ 为左端点, 则应为 $0 \leq x - a < \delta_1$, 类似处理 $x_0 = b$) 有

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0 \quad \dots\dots\dots (*)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 对 $\frac{f^2(x_0)}{2} \varepsilon$, 可找到 $\exists \delta_2 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_2$, 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2} \varepsilon \quad \dots\dots\dots (**)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} \right| = \frac{|f(x_0) - f(x)|}{f(x)f(x_0)} < \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} < \frac{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2 \cdot \varepsilon}{\frac{1}{2}[f(x_0)]^2} = \varepsilon.$$

故知 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x = x_0$ 处连续。由 x_0 的任意性, 知 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上连续。

习题 53 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \leq 0, \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

解 $f(0) = 1 + \beta$, 而 $f(0-0) = 1 + \beta$,

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \text{不存在}, & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\alpha > 0$, $\beta = -1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

当 $\alpha > 0$, $\beta \neq -1$ 时, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点 (第一类间断点)。

当 $\alpha \leq 0$, 时 $x = 0$ 为第二间断点。

习题 54 设函数 $f(x) = \begin{cases} 5e^x - \cos x, & x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} \alpha x}, & x > 0 \end{cases}$ 问当 $\alpha = ?$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

连续。 **解**

$$f(0) = 5 - 1 = 4, f(0-0) = 4, f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} \alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\alpha x} = \frac{2}{\alpha}.$$

$\therefore$ 当 $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, 即 $\frac{2}{\alpha} = 4$, $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

习题 55 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x}$ 的间断点, 并判定其类型.

解 因当 $x = n$ (n 为任一整数) 时, $\sin \pi x = 0, \therefore x = n$ 是 $f(x)$ 的间断

点。再细分, 当 $n \neq \pm 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x} = \infty$, 不存在, 故除 ± 1 处的

任何整数都是 $f(x)$ 的第二类间断点。因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2t}{\sin \pi(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2 + 2t}{\sin \pi t \cos \pi + \cos \pi t \sin \pi} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t^2}{\sin \pi t} - \frac{2t}{\sin \pi t} \right) = -\frac{2}{\pi}, \text{ 同理 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sin \pi x} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

亦即 $x = \pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类(可去)间断点.

习题 56 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2}x}, & x \leq 0 \\ \sin \frac{\pi}{x^2 - 4}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点并判定其类型。

型。

解 $f(x)$ 的分段点为 $x = 0$. $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2}x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x^2 - 4} = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类(跳

跃)间断点。当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2}x}$, 在点

$x = -1, -3, -5, \dots, -(2k+1), \dots (k = 0, 1, 2, \dots)$ 处, $f(x)$ 无意义, 故

$x = -1, -3, -5, \dots, -(2k+1), \dots$ 是 $f(x)$ 的间断点。因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(1+x)}{\cos \frac{\pi}{2}x} \stackrel{u = \frac{\pi}{2}(1+x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{2u}{\pi} - 1 \right) \\ &= -\frac{2}{\pi}, \therefore x = -1 \end{aligned}$$

是第一类（可去）间断点。显然 $x = -3, -5, \dots$ 都是极限为 ∞ 的第二类间断点。当 $x > 0$ 时， $f(x) = \sin \frac{x}{x^2 - 4}$ ，在点 $x = 2$ 时， $f(x)$ 没定义，故 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的间断点。又 $\because \lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{x}{x^2 - 4}$ ，不存在，故为第二类间断点。

习题 57 设函数 $f(x) \in C[0, +\infty)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$ ，试证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

证 因为连续，所以 $\forall a, b \in [0, +\infty)$ ， $f(x)$ 在 $[a, b] \subset [0, +\infty)$ 上有界。又

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$ ，所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists K_1$ ，

当 $x > K_1$ 时，恒有 $|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$ ，取 $x > K_1 + 1$ ，则存在自然

数 n 使得 $n \leq x - K_1 < n + 1$ 。记 $l = x - K_1 - n$ ，则 $0 \leq l < 1$ ，且 $x = K_1 + l + n$ ，

于是

$$\frac{f(x)}{x} - A = \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(K_1 + l)}{n} - A \right] + \frac{f(K_1 + l)}{x} - \frac{K_1 + l}{x} A. \text{ 下面估计上式右}$$

边三项的绝对值。

(1)

$$\because \frac{n}{x} \leq 1, \therefore \left| \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(K_1 + l)}{n} - A \right] \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(K_1 + l)}{n} - A \right| =$$

$$\left| \frac{f(K_1 + l + n) - f(K_1 + l)}{n} - A \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n [f(K_1 + l + i) - f(K_1 + l + i - 1) - A] \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(K_1 + l + i) - f(K_1 + l + i - 1) - A| < \frac{1}{n} \cdot n \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[K_1, K_1 + 1]$ 上有界，即 $\exists M > 0$ ，使 $|f(x)| \leq M$ 。故

$$\exists K_2 = \frac{3M}{\varepsilon}, \text{ 当 } x > K_2 \text{ 时, 恒有 } \left| \frac{f(K_1 + l)}{x} \right| < \frac{M}{K_2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K_1 + l}{x} A = 0$, 故 $\exists K_3 > 0$, 使当 $x > K_3$ 时恒有

$$\left| \frac{f(K_1 + l)}{x} A \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ 综合 (1), (2), (3) } \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \text{ 取}$$

$K = \max\{K_1 + 1, K_2, K_3\}$, 则当 $x > K$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \varepsilon, \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

习题 68 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$, 证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 有相同周期。设 $\varphi(x)$ 的周期为 p , 则

$\varphi(x + p) = \varphi(x)$, 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x + p) - \psi(x + p) \rightarrow 0$, 即得

$\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x + p)] = 0$, 以及

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) - \psi(x + p)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x + p)] - \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0 \dots\dots\dots (*)$$

现在说明 $\psi(x)$ 的周期也是 p 。若不然, 则至少存在一个 x_0 , 使

$\psi(x_0) \neq \psi(x_0 + p)$. 设 $\psi(x)$ 的周期为 q , N 为任意正整数,

$x = x_0 + Nq$, 以及 $\alpha = |\psi(x_0) - \psi(x_0 + p)| > 0$, 此时恒有

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x + p)| &= |\psi(x_0 + Nq) - \psi(x_0 + Nq + p)| \\ &= |\psi(x_0) - \psi(x_0 + p)| = \alpha. \end{aligned}$$

但由 (*), 对充分大的 x , 必成立 $|\psi(x) - \psi(x + p)| < \alpha$, 这显然矛盾 (矛盾于 $= \alpha$) $\therefore p = q$. 下面证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 若结论不真, 则至少存在

一个 x_1 , 使 $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$. 记 $\beta = |\varphi(x_1) - \psi(x_1)| > 0$, 则 $\forall x = x_1 + Np$, 恒有

$|\varphi(x) - \psi(x)| = \beta$, 这与 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ 矛盾。于是 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

习题 59 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n})$

$$\text{解 } \because \sin \frac{x}{2^n} = \sin(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}) = 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}}, \quad \text{于是}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{4}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{4}}{2 \sin \frac{x}{8}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x} \cdot 1) = 1.$$

习题 60 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \cdots + \frac{n}{a^n})$.

$$\text{解 记 } S_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \cdots + \frac{n}{a^n}, \text{ 则 } \frac{1}{a} S_n$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \cdots + \frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$S_n - \frac{1}{a} S_n = (\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots + \frac{1}{a^n}) - \frac{n}{a^{n+1}}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{1}{a} [1 - (\frac{1}{a})^n]}{1 - \frac{1}{a}} - \frac{n}{a^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{a}{a-1} (\frac{1}{a-1} - 0) = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

习题 61 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$, 其中 $a > 1$.

$$\begin{aligned} \text{证 设 } x_n &= \frac{n}{a^n}, \text{ 则 } \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\frac{n+1}{a^{n+1}}}{\frac{n}{a^n}} = \frac{n+1}{a^n} \\ &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \because a > 1, \text{ 则 } \exists N > 0, \text{ 使得当 } n > N \text{ 时,} \\ \text{有 } \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < q < 1. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

$$\text{习题 62 } a = ? \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 点连续.}$$

解

$$\begin{aligned} \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 - \sin^2 \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

如果函数在 $x=0$ 连续, 则 $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{63. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x^2}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + x} \quad \text{(分子分母除以 } x) = -\infty.$$

